

Referate.

Geschichtliches.

Chace, Arnold B.: The Egyptian fraction reckoning. *Archeion* (Roma) **13**, 40—41 (1931).

The editor of the Rhind Mathematical Papyrus reacts to some critical remarks of Kurt Vogel (*Arch. Gesch. Math. usw.* **12**, 414—427; *Archeion* **12**, 397—400) on his explanation of Egyptian fraction-reckoning. According to Chace we cannot prove that the Egyptians had the conception of the general fraction and we do not need the hypothesis, that they did have it, to explain the mathematics of the Rhind-papyrus. The introduction of the unit-fraction as an auxiliary unit is a philosophical idea to describe the processes of fraction-reckoning, but the Egyptians did not develop a theory; they reckoned. They thought of their fractions as representing a certain part of a set of objects of some kind. We may speak of "applying the fraction" to the number of the set, without specifying the nature of these objects. The idea of general fraction may not have come until after the time of the Rhind-papyrus. It is not necessary to suppose that the Egyptians understood something that they could not express.

E. J. Dijksterhuis (Oisterwijk).

Vogel, Kurt: Zur ägyptischen Bruchrechnung. *Archeion* (Roma) **13**, 42—44 (1931).

In Gegensatz zu der von A. B. Chace (*Archeion* **13**, 40—41) vertretenen Auffassung sieht Verf. den Beweis, daß die Ägypter den allgemeinen Bruch verwendeten, aus dem Wortlaut des Textes in dem Rhind-papyrus erbracht. Stellen wie Rhind 70 beweisen, daß die Identität zwischen dem allgemeinen Bruch $2/n$ und der Division $2 : n$ klar erfaßt war. Man kann noch weiter gehen und den $n \dot{j} s'$ -Terminus (ein Fachwort für Division) als Umschreibung des allgemeinen Bruches ansehen. Die Relativität zwischen Einheit und Vielheit ist nicht ein Gedanke, der erst durch theoretisches Systematisieren in die Bruchrechnung hineingetragen wird, sondern die unentbehrliche Grundlage jeder Metrologie und der sich daraus entwickelnden Teilungs- und Bruchrechnung. Die Existenz von Gedankengängen, die die Ersetzung der Einheit durch eine Vielheit bewirken, ist textlich belegt.

E. J. Dijksterhuis (Oisterwijk).

Miller, G. A.: A few theorems relating to the Rhind Mathematical Papyrus. *Amer. math. Monthly* **38**, 194—197 (1931).

Im Anschluß an einige Methoden der ägyptischen Mathematik wird über nahe-
liegende mathematische Erweiterungen dieser Fragestellungen gesprochen.

Neugebauer (Göttingen).

Dingler, Hugo: Über die Anfänge des exakten Systemgedankens bei den Griechen. *Archeion* (Roma) **13**, 1—10 (1931).

Betrachtungen über die Entstehung einer Beweissystematik in der frühgriechischen Geometrie, hauptsächlich im Anschluß an die Überlieferung über Hippokrates v. Chios und das Quadraturenproblem.

Neugebauer (Göttingen).

Bortolotti, Ettore: La scoperta dell'irrazionale e le frazioni continue. *Period. Mat.*, IV. s. **11**, 133—148 (1931).

Verf. teilt zuerst mit, was über das Auftreten des Irrationalen in der griechischen Mathematik überliefert ist. Hierher gehört neben den Stellen bei Platon der Beweis für die Irrationalität des Verhältnisses von Quadratseite und -diagonale bei Aristoteles sowie der arithmetische Beweis für die Inkommensurabilität zweier Größen A und B bei Euklid (X, 8—9). Es fällt auf, daß bei diesem Beweis ein besonders ge-

eigneter Satz (X, 2) nicht verwendet wurde, der auf den fortlaufenden Messungen $A = B \cdot q_1 + R_1$, $B = R_1 \cdot q_2 + R_2$ usw. aufgebaut ist, was arithmetisch auf die Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers hinausläuft. In dieser Weise dachte sich Zeuthen den Beweis des Theodoros (von dem Platon spricht), wobei die auftretenden arithmetischen Größen mit den Mitteln der geometrischen Algebra dargestellt worden seien. Verf. lehnt dies ab; auf keinen Fall könne von einer historischen Tatsache gesprochen werden, um so mehr als Theodoros ein den Gedankengängen des Aristoteles entsprechender Beweis möglich gewesen wäre. — Man hat vielfach den Beweis der Irrationalität zweier homogener Größen in Beziehung gebracht zu den Werten einer Zahlenfolge, die als Näherungswerte einer Kettenbruchentwicklung gedeutet werden können. Verf. führt eine Reihe überzeugender Gründe gegen die Annahme der Kenntnis der Kettenbrüche bei den Griechen an. Nun findet sich bei Theon eine Stelle, auf die sich jene Ansichten gründen und die auch Veranlassung gab, daß man den Griechen die Lösung der Pellischen Gleichung zusprach. Es wird dort von einem Quadrat, in dem sowohl „Seite“ wie „Diagonale“ gleich der Einheit ist, ausgegangen und weitere Seiten l und Diagonalen d nach den Formeln $l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$ und $d_n = 2 \cdot l_{n-1} + d_{n-1}$ gebildet. Dies führt für $l_1 = 1$ und $d_1 = 1$ auf die Identität $d_n^2 - 2l_n^2 = \pm 1$ und für $d:l$ auf die Zahlenfolge $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$ usw. Verf. lehnt die Deutung dieser Reihe als Näherungswerte einer Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{2}$ ab. Ebenso wenig sei dadurch der Beweis für das Vorhandensein der Methode zur Bestimmung des g. g. T. gegeben. Auch sei man nicht berechtigt, die Kenntnis der Lösung der Pellischen Gleichung $2l^2 - d^2 = \pm 1$, die Tannery sogar auf $x^2 - py^2 = \pm 1$ ausdehnt, anzunehmen. Vielmehr diene die Stelle der Rechtfertigung des pythagoreischen Prinzips, daß die Einheit die Grundlage aller Dinge sei. Verf. zeigt schließlich, wie man durch eine einfache, dem griechischen Geist entsprechende Flächenvergleiche auf die Beziehung $d/l = (d + 2l)/(d + l)$ kommen kann, die dann auf die genannte Zahlenreihe führt. Man wird den vorsichtigen Schlußfolgerungen Bortolottis zustimmen, insbesondere dem Gedanken, daß die Kettenbrüche ihre Entstehung empirischen Versuchen und einer kombinierenden Beobachtungsgabe verdanken. Doch halte ich es nicht für ausgeschlossen, daß dies schon vor Cataldi und Schwenter erreicht wurde.

Kurt Vogel (München).

Ver Eecke, Paul: Note sur un théorème de statique démontré dans l'antiquité grecque. *Mathesis* 45, 84—86 (1931).

Audisio, Fausta: Il numero π . *Period. Mat.*, IV. s. 11, 11—42 (1931).

Bortolotti, Ettore: Sul numero π . *Period. Mat.*, IV. s. 11, 110—113 (1931).

Audisio, Fausta: Ancora sul numero π . *Period. Mat.*, IV. s. 11, 149—150 (1931).

Cavaignac, E.: Les tendances du mouvement scientifique européen depuis Auguste Comte. *Scientia* (Milano) 49, 249—254 (1931).

De Giuli, G.: Galileo e Descartes. *Scientia* (Milano) 49, 207—220 (1931).

Helbronner, Paul: Sur un texte de la troisième lettre circulaire de Pascal, relative à la cycloïde (7. et 9. octobre 1658). *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 998—1000 (1931).

Natucci, A.: Sulla geometria dei cerchi e delle sfere contributi dei geometri francesi agli inizi dell'Ottocento. *Period. Mat.*, IV. s. 11, 69—83 (1931).

● Loria, Gino: Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia. 4. ediz. total. rifatta. Padova: Antonio Milani 1931. XXIII, 467 S. geb. L. 60.—.

Dieses Werk stellt eine umfangreiche historische Bibliographie über die Entwicklung der Geometrie, vor allem des letzten Jahrhunderts, dar. Die Vorgeschichte ist nur kurz skizziert, das Hauptgewicht liegt auf der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Die Entwicklung der letzten 30 Jahre ist mit berücksichtigt, wenn auch nur in Auswahl, von der der Verf. sagt: „Sul modo con cui essa venne fatta i giudizi saranno discordi, essendo frequente il fenomeno di lettori i quali, mentre non sentono alcuna gratitudine per quanto viene

loro insegnato, non perdonano all' autore di aver taciuto quanto essi conoscono perfettamente“. Man kann vielleicht hinzufügen, daß aus einer solchen Bibliographie vor allem ersehen werden kann, welche erstaunliche Masse von Literatur bereits in der nächsten Generation keineswegs mehr als „perfettamente conosciuto“ bezeichnet werden kann. Für die Geschichtsschreibung der Geometrie des 19. Jahrhunderts wird daher dieses Werk ein wichtiges Hilfsmittel sein.

Neugebauer (Göttingen).

Hayashi, Tsuruichi: On the treatment of integers and fractions in the old Japanese mathematics. *Tôhoku math. J.* **33**, 292—327 (1931) [Japanisch].

Hayashi, Tsuruichi: On the combinatory analysis in the old Japanese mathematics. *Tôhoku math. J.* **33**, 328—365 (1931) [Japanisch].

● Zinner, Ernst: Die Geschichte der Sternenkunde. Von den ersten Anfängen bis zur Gegenwart. Berlin: Julius Springer 1931. XI, 673 S., 13 Taf. u. 54 Abb. RM. 18.60.

Andersen, Ruben: Eine Bemerkung zur Erklärung der Tzolkinperiode im Kalender der Maya. (*Ole Römer-Observ.*, Aarhus.) *Astron. Nachr.* **242**, 125—126 (1931).

Emanuelli, Pio: Ai margini del terzo centenario della morte di Keplero. *Riv. Fis. ecc.* **5**, 178—183 (1931).

Gliozzi, Mario: Le origini della fisica sperimentale: La determinazione del peso specifico dell'aria. *Period. Mat.* **11**, 1—10 (1931).

Swann, W. F. G.: Michael Faraday. *Science* (N. Y.) **1931 I**, 433—439 u. 462—468.

Potonniée: Sur la découverte en Russie de lettres inédites de Nicéphore Niepce, inventeur de la photographie. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 397—398 (1931).

Sarton, George: The discovery of the electric cell (1800). *Isis* (Bruges) **15**, 124 bis 128 (1931).

Breithaupt, G.: Zur Geschichte der Dosenlibelle. *Z. Instrumentenkde* **51**, 256—259 (1931).

Zahlentheorie.

● Bachmann, Paul: Grundlehren der neueren Zahlentheorie. **3.**, neu durchges. Aufl. Hrsg. v. Rob. Haussner. Berlin u. Leipzig: de Gruyter 1931. XVI, 252 S. RM. 9.50.

Rivier, W.: Sur un théorème fondamental de l'Algèbre. *J. de Math.*, **IX**, s. **10**, 213—218 (1931).

Die Arbeit bringt einen neuen, kurzen Beweis dafür, daß die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}) \quad (a_{ik} \text{ ganz})$$

in ganzen Zahlen lösbar ist. Der Verf. beweist zunächst den Satz für $m = 2$, $n = 2$; ferner den Hilfssatz: „Wenn man jede der 2 Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = d', \quad \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = d'',$$

in ganzen Zahlen lösen kann, wo d' , d'' zwei gegebene ganze Zahlen sind, dann kann man auch die folgende Gleichung in ganzen Zahlen lösen:

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = (d', d'').“$$

Der Beweis des Satzes erfolgt nun in wenigen Zeilen.

Hofreiter (Wien).

Bell, E. T.: Factorability of numerical functions. (*California Inst. of Techn., Pasadena.*) *Bull. amer. math. Soc.* **37**, 251—253 (1931).

Eine numerische (d. h. eindeutige, endliche, für alle ganzen positiven Werte des Arguments erklärte) Funktion heißt „factorable“, wenn das Produkt ihrer Werte für m und n den Wert für mn liefert, sobald m und n teilerfremd sind. Unter fg wird die durch $h(n) = \sum f(d) g(t)$ bestimmte Funktion verstanden, wo d und t alle Paare komplementärer Teiler von n durchlaufen. Nimmt man $g = f$, so gelangt man zu f^2

und ähnlich zu f^3 usw. Eine Beziehung $f^r = g$, wo r eine rationale Zahl p/q bedeutet, hat den Sinn von $f^p = g^q$. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf „reguläre“ Funktionen, d. h. solche, die für das Argument 1 einen von 0 verschiedenen Wert haben. Eine Funktion f^r ist dann und nur dann faktorabel, wenn f es ist. Sind f, g, \dots faktorabel, so ist es auch $f^a g^b \dots$, wo a, b, \dots rationale Exponenten sind. Ist fg faktorabel, so sind es entweder f und g beide oder keines von ihnen. Diese in Punkt 1 aufgestellte Aussage wird in 2 unter „theorems“ als „lemma“ nochmals angeführt, aber mit Weglassung der Bedingung, daß fg faktorabel ist. Ferner wird als „theorem 2“ eine Ausdehnung auf mehrere Faktoren angegeben, die aber wohl einen Irrtum enthält. Ein „theorem 3“ zeigt, daß es sich um keine trivialen Aussagen handelt. (Nach brieflicher Mitteilung des Verf. an den Ref. wird ein Nachtrag in einem späteren Heft des Bulletin erscheinen.)

Schrutka (Wien).

Bell, E. T.: On a type of illusory theorem concerning higher indeterminate equations. (California Inst. of Techn., Pasadena.) Bull. amer. math. Soc. **37**, 261–263 (1931).

Es handelt sich um das von Liouville ohne Beweis angegebene Theorem: Ist x_1, x_2, \dots, x_μ ein ganzzahliges positives Lösungssystem der eine endliche Anzahl von Lösungen besitzenden simultanen Gleichungen

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (*)$$

zu denen noch die Anzahl der Lösungen beschränkende Bedingungen hinzutreten können und ist d_i ein Teiler von x_i , setzt man ferner $\lambda(x) = +1$ oder -1 , je nachdem x das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl gleicher oder verschiedener Primfaktoren ist, dann ist $\sum \lambda(d_1, d_2, \dots, d_\mu)$ gleich der Anzahl der Lösungen des Systems $f_k(y_1^2, y_2^2, \dots, y_\mu^2) = 0$, wobei über sämtliche Teilerprodukte aller Lösungen von (*) zu summieren ist. Es werden Verallgemeinerungen dieses Satzes, darunter eine von Gegenbauer herrührende, gegeben.

K. Pingitzer (Wien).

Pierce, T. A.: Parametric solutions of certain diophantine equations. Bull. amer. math. Soc. **37**, 264–266 (1931).

Sind A und B zwei Matrices und $f(\lambda) = 0$ und $g(\lambda) = 0$ ihre charakteristischen Gleichungen, so ist nach Frobenius $|g(A)| = R(f, g)$, wobei R die Resultante von f und g bedeutet. Daraus folgt, wenn m und n die Ordnungen von A und B sind,

$$|g(A)| = (-1)^{mn} |f(B)|.$$

Setzt man für A und B geeignet gewählte Matrices ein, so erhält man die Lösungen diophantischer Gleichungen in Parameterform, was an drei Beispielen, darunter $x^2 + y^2 = z^2$, gezeigt wird.

K. Pingitzer (Wien.)

Jarník, Vojtěch: Über die simultanen diophantischen Approximationen. Math. Z. **33**, 505–543 (1931).

$P = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$ sei ein Punkt in R_s mit $0 \leq \Theta_i < 1$ (Θ_i reell, $s \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$). $\omega(x)$ sei eine für $x \geq 1$ definierte, positive Funktion. Wir sagen, daß P die Approximation $\omega(x)$ zuläßt, wenn es zu jedem $c > 0$ ein System von ganzen p_1, p_2, \dots, p_s, q ($q > c$) gibt mit $|\Theta_i - p_i/q| < \omega(q)$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Die Menge aller P , welche die Approximation $\omega(x)$ zulassen, sei $M(\omega(x); s)$. Man weiß nach Khintchine (Math. Z. **24**), daß, wenn $\omega^s(x) x^{s+1}$, für $x \geq 1$, abnehmend ist und wenn $\omega^s(x) x^{s+1} \rightarrow 0$, für $x \rightarrow \infty$, das äußere Lebesguesche Maß von $M(\omega(x); s)$

Null oder Eins ist, je nachdem $\int_1^\infty \omega^s(x) x^s dx$ konvergiert oder divergiert.

Verf. fragt sich nun: a) Wenn die Approximationen $\omega_1(x)$ und $\omega_2(x)$ beide die Khintchineschen Bedingungen erfüllen und $\int_1^\infty \omega_1^s(x) x^s dx$ sowohl wie $\int_1^\infty \omega_2^s(x) x^s dx$ konvergiert, aber die Approximation $\omega_1(x)$ schärfer ist als $\omega_2(x)$, kann man dann entscheiden ob die Menge $M(\omega_1; s)$ „kleiner“ ist als die Menge $M(\omega_2; s)$, trotzdem beide Mengen das Lebesguesche Maß Null haben? b) Vorgelegt seien 2 Approxima-

tionen $\omega_1(x)$ und $\omega_2(x)$; $\omega_1(x)$ sei schärfer als $\omega_2(x)$. Gibt es dann eigentliche P , welche zwar $\omega_2(x)$, aber nicht $\omega_1(x)$ zulassen? (Ein eigentliches P liegt vor, wenn keine Gleichung $k_1\Theta_1 + k_2\Theta_2 + \dots + k_s\Theta_s + k_0 = 0$ mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden k_0, k_1, \dots, k_s erfüllt ist.) a) Verf. verfeinert den Maßbegriff nach Hausdorff (Math. Ann. 79): $f(x)$ sei für $x > 0$ definiert, stetig, positiv, wachsend; $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. A sei eine Punktmenge aus R_s , ϱ eine positive Zahl. W_1, W_2, \dots sei eine höchstens abzählbare Folge \mathfrak{S} von s -dimensionalen offenen Würfeln in R_s , deren Kanten den Koordinatenachsen parallel sind; die Kantenlängen seien bzw. d_1, d_2, \dots und sämtlich $< \varrho$. Die untere Grenze der Summe $\sum_{i=1}^{\infty} f(d_i)$ für alle solche \mathfrak{S} , welche ein Überdeckungssystem von A bilden, heiße $L_{\varrho}(A; f(x))$. Dann existiert

$$L(A; f(x)) = \lim_{\varrho=0} L_{\varrho}(A; f(x)); \quad 0 \leq L(A; f(x)) \leq \infty.$$

Mit $L(A; f(x))$ wird jetzt operiert; für $f(x) = x^s$ ist $L(A; f(x))$ das äußere Lebesguesche Maß von A . Das wichtigste Ergebnis des Verf. besagt nun [in allen Sätzen ist $s(\geq 1)$ vorgegeben]: $\omega(x)$ sei für $x \geq 1$ positiv, stetig und abnehmend; $f(x)$ sei für $x > 0$ positiv, stetig, wachsend; $\omega(x) \rightarrow 0$, für $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 0$, für $x \rightarrow 0$. Es seien $\omega^s(x) x^{s+1}$ und $f(2\omega(x)) x^{s+1}$ monoton für $x \geq 1$, $f(x)/x^s$ monoton für $x > 0$; es sei $\int_1^{\infty} \omega^s(x) x^s dx$ konvergent. Es sei $M_e(\omega(x); s)$ die Menge aller eigentlichen $P = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$, die die Approx. $\omega(x)$ zulassen. Behauptung: Dann ist entweder

$$L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = 0, \quad \text{oder} \quad L(M_e(\omega(x); s); f(x)) = \infty,$$

je nachdem das Integral $\int_1^{\infty} f(2\omega(x)) x^s dx$ konvergiert oder divergiert.

Korollar: (Man setze $\omega(x) = x^{-\alpha}$, $f(x) = x^{\gamma}$). Für $\alpha > 1 + 1/s$ ist

$$L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^{\gamma}) = 0, \quad \text{für } \gamma > \frac{s+1}{\alpha} \quad \text{und} \quad L(M_e(x^{-\alpha}; s); x^{\gamma}) = \infty, \quad \text{für } 0 < \gamma \leq \frac{s+1}{\alpha}.$$

Die größte Schwierigkeit des Beweises liegt im zweiten Teil der Behauptung (bei divergierendem Integral); hauptsächlich hat dies seinen Grund im Fall $s > 1$. Wesentlich ist der vom Verf. eingeführte neue Begriff „Überschlagungssystem“ einer Menge in R_s : eine Verallgemeinerung von „Überdeckungssystem“. b) Aus dem in a) genannten Satz wird hergeleitet: $\omega(x)$ sei stetig, positiv und $\omega^s(x) x^{s+1}$ sei monoton für $x \geq 1$; $\int_1^{\infty} \omega^s(x) x^s dx$ sei konvergent. $\lambda(x)$ sei für $x \geq 1$ definiert und habe

für $x \geq 1$ eine stetige Ableitung; es sei $\lambda(x)/x$ monoton und ≥ 1 , für $x \geq 1$, und $\lambda(x)/x \rightarrow \infty$, für $x \rightarrow \infty$. Behauptung. Es gibt eigentliche $P = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$, die zwar die Approximation $\omega(x)$, nicht aber die Approximation $\omega(\lambda(x))$ zulassen. Dieser Satz ist sehr scharf für solche $\omega(x)$, die für $x \rightarrow \infty$ nicht allzu stark abnehmen. Für andere $\omega(x)$ liefert der folgende Satz die Ergänzung: Es sei $\omega(x)$ für $x \geq 1$ positiv, abnehmend, $\omega(x) = o(x^{-2})$ (für $x \rightarrow \infty$). Dann gibt es für jedes ganze $s \geq 1$ ein eigentliches System $P = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s)$, daß zwar die Approximation $\omega(x)$, aber keine Approximation $c\omega(x)$ ($0 < c < 1$, c von x unabhängig) zuläßt. Der Beweis dieses Satzes erfolgt ohne die Hilfsmittel aus a). Verf. konstruiert bei $\omega(x)$ einen Kettenbruch Θ , der das Gefragte leistet für den Fall $s = 1$, $P = \Theta$; der Rest geht mit Induktion nach s . J. F. Koksma (Göttingen).

Chowla, S. D.: Some problems of diophantine approximation. (I). Math. Z. 33, 544—563 (1931).

Ist Θ eine Irrationalzahl mit beschränkten Kettenbruchnennern im regelmäßigen Kettenbruch (Θ hat b. K.) und ist $r_k(n)$ ($k \geq 2$, $n \geq 0$) die Anzahl der Zerlegungen von n

als Summe von k Quadraten, so gilt $S_k = \sum_{n \leq x} r_k(n) e^{n\pi\theta i} = \sum_{n \leq x} r_k(n) e(n\pi\theta i) = O(x^{\frac{k}{2}-1})$, für $k \geq 5$ (Chowla $k \geq 12$, Proc. L. M. S. 28; Walfisz $k \geq 5$, Math. Z. 33). Verf. beweist jetzt $S_4 = O(x \log^2 x)$; er verwendet a) die Bez. $r_4(n) = 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4)$ ($\sigma(x)$ = die Summe der Teiler von x , wenn x ganz ≥ 0 und sonst $\sigma(x) = 0$), b) die Umformung

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} e(2n\pi\theta i) \right| = \left| \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \sum_{n \leq x/d} e(2nd\pi\theta i) \right|$$

und c) einen Hilfssatz von Behnke. Auf ähnliche Weise wird bewiesen ein Satz, woraus folgt: a) das Oppenheimsche Ergebnis $S_2 = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$, b) das neue $\sum_{n \leq x} d(n) e(2n\pi\theta i) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$; hierin ist $d(n)$ die Teileranzahl von n ; alles gilt, wenn θ b. K. hat. Etwas tiefere Mittel erfordert; Für beliebiges irrationales θ gilt

$$\sum_{n \leq x} d(n) e^{2n\pi\theta i} = o(x \log x) \quad \text{und} \quad \sum_{n \leq x} \sigma_a(n) e^{2n\pi\theta i} = o(x^{a+1}) \quad (a > 0) \quad (1)$$

[für $a \geq 0$ ist definiert $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$]. Wie scharf (1) ist, folgt aus: wenn $\varphi(x)$ für $x > 0$ positiv, abnehmend ist, mit $\varphi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$, dann kann man Irrationalzahlen θ finden mit $\sum_{n \leq x} d(n) e(2n\pi\theta i) = \Omega(x \log x \cdot \varphi(x))$ und auch mit

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} \cos(2n\pi\theta) = \Omega_R(\log^2 x \cdot \varphi(x)). \quad (2)$$

Zum Beweise dieser letzten Ergebnisse konstruiert Verf. einen Kettenbruch θ (er verwendet dabei den Satz von Dirichlet über Primzahlen in einer arithmetischen Reihe) und weist nach, daß θ das Gefragte leistet. Am Schluß beweist Verf. noch: Für alle $a > 0$ und alle irrationale θ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin(2n\pi\theta) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi(n\theta)}{n^{1+a}}$$

und (für $a = 0$): wenn θ b. K. hat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n} \sin(2n\pi\theta) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi(n\theta)}{n}, \quad (3)$$

hierin ist $\Psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Ergänzung: Es gibt irrationale θ , derart, daß

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Psi(n\theta)}{n} = \Omega_L(\log x \cdot \varphi(x))$$

ist, also $\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n\theta)/n$ divergiert [$\varphi(x)$ ist oben definiert]. Eine ähnliche Formel wie (2) für das linke Glied von (3) hat Verf. noch nicht beweisen können.

J. F. Koksma (Göttingen).

Chowla, S., and S. S. Pillai: Periodic simple continued fractions. J. Lond. math. Soc. 6, 85—89 (1931).

Vijayaraghavan hat 1927 bewiesen, daß für die Anzahl $N(R)$ der Elemente einer Periode der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{R}

$$N(R) = O(R^{\frac{1}{2}} \cdot \lg R)$$

für alle positiven ganzen R , aber

$$N(R) > R^{\frac{1}{2}-\delta}$$

mit beliebig kleinem $\delta > 0$ für unendlich viele ganze positive R gilt. Verff. verschärfen dieses Resultat unter der Annahme, daß die Funktion $\sum_{(n, 2R)=1} (R/n) \cdot n^{-s}$ — dabei bedeutet

(R/n) das verallgemeinerte Legendresche Symbol — auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ keine Nullstellen habe, zu folgenden Sätzen: I. Für alle solchen R gilt

$$N(R) = O(\sqrt{R} \cdot \lg \lg R);$$

II. es gibt 2 positive Konstanten C_1, C_2 , so daß für unendlich viele ganze positive R , nämlich alle $R = 5^{2n+1}$, \sqrt{R} irrational,

$$C_1 \cdot \sqrt{R} < N(R) < C_2 \cdot \sqrt{R}$$

gilt; III.

$$\sum_{n \leq R} N(n) = O(R^{\frac{3}{2}}).$$

I. folgt ohne weiteres aus den bekannten Tatsachen

$$h(D) \cdot \lg(T + U \cdot \sqrt{D}) = 2 \cdot \sqrt{D} \cdot \sum_{(n, 2D)=1} (D/n) \cdot n^{-1},$$

$$N(D) = O(\lg(T + U \cdot \sqrt{D})),$$

wo $h(D)$ die Klassenzahl des quadratischen Körpers mit der Diskriminante D bedeutet, und der unter Annahme der Riemannschen Vermutung für $L(s, \lambda)$ mit $\lambda \bmod k$ von Littlewood bewiesenen Ungleichung

$$L(1) = O(\lg \lg k).$$

Dem Beweis von II. und III. liegt folgender Hilfssatz zugrunde: ist $1 < m < \sqrt{R}$, $(m, 2R) = 1$, für irgendein x $m/(x^2 - R)$, $h(R) = 1$ und $\omega(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von m , so tritt m genau 2^ω mal in der ersten Periode des Kettenbruches für \sqrt{R} auf. Ferner wird benutzt, daß für alle ganzen $n > 0$

$$h(5^{2n+1}) = 1$$

ist, schließlich noch die Identität

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(m)} \cdot f(m)}{m^s} = \frac{\zeta(s) \cdot L(s)}{(1 + 2^{-s})(1 + 5^{-s}) \cdot \zeta(2s)},$$

wo

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} - 7^{-s} + 9^{-s} + 11^{-s} - 13^{-s} - 17^{-s} + 19^{-s} + \dots$$

und $f(m) = 1$, wenn alle Primfaktoren von m die Form $20k + 1$, 9, 11, 19 haben, $f(m) = 0$ sonst, bedeuten, und die Formeln

$$N(R) \geq \sum_1^{\sqrt{R}} 2^{\omega(m)} \cdot f(m) \quad \text{für} \quad R = 5^{2n+1},$$

$$\sum_{m \leq x} 2^{\omega(m)} \cdot f(m) = \frac{10 \cdot L(1)}{3 \cdot \pi^2} \cdot x + O(x^{\frac{1}{2}} \cdot \lg x),$$

die teils bekannt sind, teils leicht durch Ausrechnung verifiziert werden können.

Maria-Pia Geppert (Breslau).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Fraenkel, A.: Sur une atténuation essentielle de l'axiome du choix. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1072 (1931).

In einer kurzen Mitteilung legt der Verf. die folgenden Resultate vor: Aus der Unabhängigkeit des Satzes „Zu jeder abzählbaren Menge endlicher Mengen gibt es mindestens eine Auswahlmenge“ von den heute in der Mengentheorie gebräuchlichen Axiomen (mit Ausnahme des Auswahlaxioms) ergibt sich die Unabhängigkeit des Satzes, daß jede Menge geordnet werden kann, von diesen Axiomen. Von dem zitierten Satze aber sind noch das allgemeine Auswahlaxiom — sogar für den Fall einer abzählbaren Menge von Mengen — und mithin der Wohlordnungssatz unabhängig.

Arnold Schmidt (Göttingen.)

Denjoy, Arnaud: Sur les ensembles ordonnés. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1011—1014 (1931).

Toute famille φ d'ensembles distincts fermés E ordonnée dans l'ordre d'inclusion des ensembles est semblable à un ensemble linéaire situé sur un segment et contenant tous ses points limites unilatéraux, intérieurs à ce segments. La démonstration ne

fait pas l'usage de la numération transfinie. On peut aussi démontrer sans faire appel à la numération transfinie le théorème connu, qu'on peut exprimer ainsi: si φ est bien ordonnée, elle est dénombrable. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

Durand, Georges: Sur un critère de dénombrabilité. *Acta Math. (Uppsala)* **56**, 363—369 (1931).

D'après M. G. Bouligand le contingent $\tau(M)$ en un point d'accumulation M d'un ensemble E est le système des demi tangentes en M , c'est à dire des demi-droites MT auxquelles on peut associer une suite infinie de points $\{M_i\}$ de E tendant vers M de manière que les angles M_iMT tendent vers zéro. Pour chaque ensemble E le sousensemble K des points M , où $\tau(M)$ est strictement convexe (est situé strictement de l'un côté d'un plan P passant par M), est dénombrable. Comme cas particulier on obtient le théorème connu de M. A. Denjoy sur les points angulaires d'une fonction continue. La méthode de la démonstration dans le cas générale est tout-à-fait analogue à celle de M. A. Denjoy. *Kolmogoroff (Moskau).*

Bouligand, Georges: Sur une application du contingent à la théorie de la mesure. *Acta Math. (Uppsala)* **56**, 371—372 (1931).

Un ensemble ponctuel E dans l'espace euclidien, dont le contingent (voir la communication précédent) laisse échapper au moins une demi-droite, est de mesure lebesguenne nulle. On ne suppose pas à priori que l'ensemble E est mesurable. *Kolmogoroff.*

Besicovitch, A. S., and G. Walker: On the density of irregular linearly measurable sets of points. *Proc. Lond. math. Soc., II. s.* **32**, 142—153 (1931).

This article is a continuation of a paper on "Linearly measurable plane sets of points" [*Math. Ann.* **97**, 422—464 (1927)]. The linear measure of a plane set is either that used by Caratheodory, or that obtained by using circles as enclosing areas and basing the measure on the sum of the diameters of the circles. If $L(A)$ denotes the measure of a set, then the upper and lower density at a point a are the greatest and least of the limits of the ratio $L(A \times C[a, r])/2r$ as $r \rightarrow 0$, respectively, $C(a, r)$ being the circle with center a and radius r . In the earlier paper it was shown that the points of a measurable set for which the density is not unity (irregular points) is not necessarily of zero linear measure, and that the points where the upper density lies in the interval $(1 - \varepsilon_0 \leq x < 1)$, ε_0 a fixed small number, do not in general have a lower density arbitrarily near the upper density. This paper adds the theorem: If A is a linearly measurable plane set, and B is the subset of A where the upper density lies in the closed interval $(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + 10^{-6})$ then A has almost everywhere on B a lower density less than $\frac{1}{3}$. *Hildebrandt (Ann Arbor).*

Bary, Nina: Sur la représentation des fonctions continues, au moyen de fonctions à variation bornée. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1183—1185 (1931).

Eine stetige Funktion $F(x)$ heiße eine Superposition n -ter Klasse von Funktionen mit beschränkter Schwankung, wenn es n Funktionen mit beschränkter Schwankung $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ gibt, so daß identisch $F(x) = \varphi_n \{ \varphi_{n-1} \dots [\varphi_1(x)] \}$ gilt und wenn eine solche Darstellung durch weniger als n Funktionen von beschränkter Schwankung nicht möglich ist. Die Verf. formuliert (ohne Beweis) den Satz: Zu jedem natürlichen n gibt es eine stetige Funktion, welche eine Superposition n -ter Klasse von Funktionen mit beschränkter Schwankung ist. Nach einem bekannten Satze der Verf. ist jede stetige Funktion als Summe von zwei Superpositionen 2. Klasse von Funktionen mit beschränkter Schwankung, also in der Form $F_1[\Phi_1(x)] + F_2[\Phi_2(x)]$ darstellbar, wo F_1, Φ_1, F_2, Φ_2 Funktionen mit beschränkter Schwankung sind. Die Frage, ob in diesem Satze die Anzahl zwei der Superpositionen auf eins erniedrigt werden könnte, wird nun negativ beantwortet, und zwar gilt sogar der Satz: Es gibt eine stetige Funktion, welche überhaupt keine Superposition endlicher Klasse von Funktionen mit beschränkter

Schwankung ist. Der Grundgedanke eines Beweises dieser Tatsache wird dargelegt.

Birnbaum (Wien).

Radaković, Th.: Über Darbouxsehe und stetige Funktionen. *Mh. f. Math.* **38**, 117 bis 122 (1931).

Man nennt eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ definierte reelle Funktion $f(x)$ stetig im Darbouxschen Sinne, wenn $f(x)$ in jedem Teilintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$, jeden zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ enthaltenen Wert annimmt. Die Klasse aller in $\langle a, b \rangle$ im Darbouxschen Sinne stetigen Funktionen heiße D . Verf. definiert folgendermaßen die Klasse D^* der in $\langle a, b \rangle$ erklärten verallgemeinerten Darbouxschen Funktionen: $f(x)$ gehört genau dann zu D^* , wenn für jedes Teilintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $\langle a, b \rangle$ die Menge der von $f(x)$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ angenommenen Werte in dem von $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ begrenzten Intervall beralldicht ist. Es werden nun folgende Sätze bewiesen: Die in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen sind die einzigen Funktionen der Klasse D^* , welche zu jeder Funktion aus D^* addiert wieder eine Funktion aus D^* ergeben. Die einzigen Funktionen aus D , die zu jeder Funktion aus D addiert wieder eine Funktion aus D ergeben, sind die Konstanten. Die stetigen Funktionen sind die einzigen Funktionen aus D , welche zu jeder Funktion aus D addiert eine Funktion aus D^* ergeben.

Birnbaum (Göttingen).

Ridder, J.: Eine Eigenschaft der fast überall nichtdifferenzierbaren, stetigen Funktionen. *Nieuw Arch. Wiskde* **17**, 1—2 (1931).

Es gibt im betrachteten Intervalle I eine Menge M erster Kategorie, so daß $D^+ = D^- = +\infty$ und $D_+ = D_- = -\infty$ auf $I - M$ ist. Der Beweis benutzt den Fundamentalsatz von Denjoy [*J. de Math.* (7) **1** (1915)], den Satz von Denjoy in §32 daselbst und den folgenden Satz des Verf.: Es sei f stetig in I und die Menge E maßhaltig in I (d. h. $E \subset I$ meßbar und $mE_j > 0$ für jedes Intervall $j \subset I$). Ist dann $D^+ = +\infty$ auf E , so ist $D_+ = -\infty$ auf einer in I dichten Menge.

Neubauer.

Charpentier, Marie: Sur les ensembles semi-fermés et leurs applications dans la théorie des points de Peano. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 913—915 (1931).

Un ensemble est semi-fermé droit (gauche) s'il contient tous ses points d'accumulation qui sont points d'accumulation du côté gauche (droit). On utilise cette définition pour l'étude des points de branchement des intégrales d'une equation differentielle $y' = f(x, y)$ (points de Peano). Si chaque point d'un domaine D est un point de branchement, l'ensemble des points de branchement complet ( gauche et  droite) est partout dense dans D .

Kolmogoroff (Moskau).

Neubauer, Milo: ber die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen. *Mh. f. Math.* **38**, 139—146 (1931).

Während jede meßbare Funktion einer reellen Veränderlichen meßbare Hauptderivierte hat (Banach, *Fund. Math.* **3**, S. 128), zeigt ein in dieser Arbeit enthaltenes Beispiel von H. Hahn, daß die partiellen Hauptderivierten einer meßbaren Funktion von 2 reellen Veränderlichen nicht immer meßbar sind. Auch der Sierpinskische Satz (*Fund. Math.* **3**, S. 123), daß die Hauptderivierten der Baireschen Funktionen einer reellen Veränderlichen wieder Bairesche Funktionen sind, läßt sich nicht auf die partiellen Hauptderivierten der Baireschen Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen übertragen, wie ein Beispiel des Verf. zeigt. Jedoch beweist er, daß diese partiellen Hauptderivierten meßbar sind.

J. Ridder (Baarn).

Brille, Jean: Sur une propriété des fonctions présentant un certain caractère complexe de résolubilité. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1191—1193 (1931).

Définitions: a) Soit P un ensemble parfait; tout segment limité  deux intervalles contigus de P et inférieur en longueur  la $(n-1)^{\text{e}}\text{me}$ partie de l'un et l'autre de ces contigus est un segment spécial (n) de P ; b) La dérivée $n^{\text{e}}\text{me}$ approximative de $F(x)$

est la dérivée approximative de sa dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ ordinaire; c) Les quantités $R_n(x, a)$ sont définies par

$$R_1(x, a) \equiv \frac{F(x+a) - F(x)}{a}; \quad R_{2p}(x, a) \equiv \frac{1}{a} [R_{2p-1}(x, a) - R_{2p-1}(x, -a)];$$

$$R_{2p+1}(x, a) \equiv \frac{1}{a} [R_{2p}(x+a, a) - R_{2p}(x, a)];$$

d) $F(x)$ est résoluble (n) si: 1° elle est continue, 2° $aR_p(x, a)$, où $p \leq n$ tend vers zéro avec a non nul et indépendant de x , 3° P étant parfait et possédant une infinité de segments spéciaux (n) , de longueur σ , d'origine α , pour chacun desquels $\omega_n(\sigma)$ sera définie selon la parité de n par

$$\omega_{2p}(\sigma) = \sigma \sum_{\lambda=1-p}^{\lambda=p} |R_{2p}(\alpha + \lambda\sigma, \sigma)|$$

ou par

$$\omega_{2p+1}(\sigma) = \sigma \sum_{\lambda=-p}^{\lambda=p} |R_{2p+1}(\alpha + \lambda\sigma, \sigma)|,$$

sur toute portion de P sans point commun avec un ensemble K , non dense sur P , la somme des $\omega_n(\sigma)$ relative à des segments σ en nombre quelconque, deux à deux extérieurs l'un à l'autre, et tous inférieurs en longueur à ε , tend vers zéro avec ε , 4° P étant parfait, et $E(\sigma')$, $P(\sigma')$ désignant l'ensemble fermé et son noyau parfait demeurant dans P quand on supprime tous les segments spéciaux de P sauf un nombre limité d'entre eux appelés σ' , on peut déterminer sur P un ensemble H fermé, non dense sur P , indépendant des σ' choisis, et tel que sur toute portion de $E(\sigma')$ et de $P(\sigma')$ sans point commun avec H , $d^{n-1}F/dx^{n-1}$ existe et est resp. continue et résoluble sur ces deux portions. L'auteur démontre: Une fonction résoluble (n) est déterminée à l'addition près d'un polynôme de degré $n-1$ si l'on connaît sur une épaisseur pleine sa dérivée $n^{\text{ième}}$ approximative.

J. Ridder (Baarn).

Verblunsky, S.: The generalized fourth derivative. J. Lond. math. Soc. 6, 82—84 (1931).

Le résultat principal de la note de M. Verblunsky est énoncé dans le théorème suivant: lorsque $a_n = o(n)$, $b_n = o(n)$ et les limites supérieures et inférieures de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin n\Theta}{n\Theta} \right)^4 \quad (\Theta \rightarrow 0)$$

sont finies et égales presque partout à une fonction $f(x)$ intégrable au sens de MM. Denjoy-Perron, la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est une série de Fourier-Denjoy. Ce résultat permet de résoudre par l'affirmative le problème posé (sous une forme un peu moins générale), il y a longtemps, par M. Marcel Riesz [Über summierbare trigonometrische Reihen; Math. Ann. 71 (1912)]: une série trigonométrique étant partout sommable (C, 1) vers une fonction intégrable (L), est-elle nécessairement une série de Fourier-Lebesgue? Les méthodes employées par l'auteur s'appuient sur l'étude des certaines propriétés de la quatrième dérivée généralisée et sont étroitement liées au mémoire cité de M. Riesz ainsi qu'à une note antérieure de M. Verblunsky [The generalized third derivative; Proc. Lond. math. Soc. 31 (1930)]. $F(x)$ étant une fonction continue, on pose

$$\Delta^4 F(x, h) = F(x+4h) - 4F(x+2h) + 6F(x) - 4F(x-2h) + F(x-4h);$$

la limite

$$D^4 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^4 F(x)}{16h^4}.$$

(lorsqu'elle existe) s'appelle quatrième dérivée généralisée de $F(x)$. On a le théorème suivant: pour toute fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle $(x_0 - 4h_0, x_0 + 4h_0)$ et y admettant les dérivées ordinaires $F'(x)$, $F''(x)$ et la dérivée généralisée $D^4 F(x)$, l'expression $\Delta^4 F(x_0, h_0)/16h_0^4$ est contenue entre les bornes de $D^4 F(x)$ dans cet intervalle. Saks (Warschau).

Verblunsky, S.: Note on summable trigonometric series. J. Lond. math. Soc. 6, 106—113 (1931).

L'auteur s'occupe des séries trigonométriques convergeant, resp. sommables, partout dans un intervalle vers une fonction non-négative. Un résultat antérieur dans cet ordre d'idées est du à M. Steinhaus: lorsque la série trigonométrique converge partout dans l'intervalle ouvert (a, b) vers une fonction non-négative $\varphi(x)$, cette fonction est sommable dans tout intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. M. Verblunsky s'occupe des conditions supplémentaires pour que la fonction $\varphi(x)$ soit sommable dans l'intervalle (a, b) tout entier. Les résultats sont étendus aux méthodes de sommation $(C, 1)$ et de Poisson. Ensuite, le théorème suivant est démontré: toute série trigonométrique sommable partout $(C, 1)$ vers une fonction non-négative, est une série de Fourier. Saks (Warschau).

Ridder, J.: Einige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Summierbarkeit von Funktionen. Nieuw Arch. Wiskde 17, 28—32 (1931).

Es sei E eine lineare Menge vom endlichen äußeren Maße und f auf E definiert. Es sei das unbestimmte obere (Fall A) oder untere (Fall B) (L -) Integral von f (d. h.

$\int_{E \cdot J}$ bzw. $\int_{E \cdot J}$ für jedes Intervall J) vorhanden und seine Ableitung (d. h.

$$D = D^+ = D_+ = D^- = D_- , \text{ wo } D_x^+ = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{E \cdot \int_{x, x+h}}{h}$$

usw.) $= f$ fast überall auf E und $= 0$ fast überall sonst. Oder aber (Fall C) es seien beide unbestimmte Integrale vorhanden und ihre Ableitungen fast überall einander gleich. In allen diesen Fällen ist f über E summierbar. Der Beweis stützt sich auf zwei (in Math. Ann. 103, 698—701 bewiesene) den Fällen A und B entsprechende Hilfssätze des Verf., deren erster lautet: Falls das obige $f > 0$ und \int_E vorhanden ist, dann gibt es eine

Menge D und auf ihr eine Funktion $M \geq 0$, so daß $D \supset E$, $m D = m_a E$, $f \leq M$ auf E und $\int_D M dx = \int_E f dx$. — Außerdem: Drei Bedingungen für die Meßbarkeit von E als Korollare von A, B, C, wenn $f = 1$ ist; naheliegende Verallgemeinerungen; ein Analogon über (R -) Integrierbarkeit. Miloš Neubauer (Brno).

Morse, Marston: The critical points of a function of n variables. Trans. amer. math. Soc. 33, 72—91 (1931).

Diese Arbeit behandelt die kritischen Punkte einer Funktion f der Klasse C'' von n Variablen, d. h. die Punkte, wo der Gradient verschwindet. Durch sorgfältige Verteilung der k -dimensionalen Komplexe in der Umgebung einer isolierten Menge von kritischen Punkten, wo $f = \text{konst.} = a$ ist, in Arten, die verschiedenen Abhängigkeitsbedingungen zu genügen haben, erhält der Verf. eine genaue Übersicht über die Zusammenhangsverhältnisse der Gebiete $f < a - \varepsilon$ und $f < a + \varepsilon$. Er gibt eine Methode an, die Anzahlen der verschiedenen Komplexarten in endlich vielen Schritten zu berechnen. Er muß einige nebensächliche Bedingungen einführen und beweist, daß diese Bedingungen erfüllt sind, wenn f analytisch ist, wenn f in der untersuchten kritischen Menge ein relatives Maximum (Minimum) hat und wenn die kritische Menge nur einen Punkt enthält. Schließlich beweist er, daß die eingeführten charakteristischen Anzahlen eine gewisse Invarianzeigenschaft besitzen gegenüber kleinen Änderungen der gegebenen Funktion f . van Kampen (Den Haag).

Analysis.

● Lainé, E.: Exercices de calcul différentiel et intégral. Paris: Vuibert 1931. Fres. 20.—

Mambriani, Antonio: Sull'algebra delle successioni. II. mem. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. 9, 25—56 (1931).

Der erste Teil dieser Abhandlung ist erschienen in Bd. 8 (1930), 103—139. Die formalen Potenzreihen $\sum a_n x^n$ oder $\sum a_n/n! x^n$ werden durch Zahlenfolgen a_n bestimmt,

und alle formalen Operationen auf Potenzreihen (Multiplikation, Division, Potenzierung, Radizierung, Differentiation, Integration) können durch elementare Operationen auf die Zahlenfolgen a_n umschrieben werden. Die Eigenschaften dieser elementaren Operationen werden vom Verfasser untersucht. *van der Waerden* (Leipzig).

Young, L. C.: On the combinatory scheme of analysis. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **27**, 232—239 (1931).

Der Verf. benutzt die symbolische Schreibweise von Alexander [*Annals of Mathemat.* **31** (1930)] bei der ein kombinatorialer Komplex durch die Form

$$\sum a x_1 x_2 x_3 \dots x_{n+1}$$

dargestellt wird, und führt die Differentialoperatoren zur Bildung des Randes, des Sternes u. dgl. ein. Ferner definiert der Verf. den Begriff des über den abstrakten kombinatorialen Komplex σ erstreckten Integrals $\int_{\sigma} dg$. (Dieses Integral ist eine Summe von endlich vielen Summanden, die den Simplexen des Komplexes entsprechen.) Für diesen Begriff wird die „Stokessche Formel“ bewiesen, welche das über den Rand des Komplexes σ erstreckte Integral durch ein Integral über σ selbst darstellt. Durch Approximation der krummen Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der simplizialen Komplexe und durch Grenzübergang werden das eingeführte Integral und die Relationen in die gewöhnlichen verwandelt.

Ephrämowitsch (Moskau.)

Belinfante, M. J.: Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionistischen Mathematik. *Proc. roy. Acad. Amsterd.* **34**, 401—412 (1931).

In der intuitionistischen Mathematik zerfällt der Begriff der Konvergenz einer Zahlenfolge in den schwächeren Begriff der negativen Konvergenz und den stärkeren der positiven Konvergenz (Brouwer, *J. f. Math.* **154**, 1—7); demgemäß erhält man zu einem Satz der klassischen Reihenlehre mehrere Analoga, je nachdem man negative oder positive Konvergenz voraussetzt bzw. fordert. Der Verf., der schon früher mehrere Sätze über unendliche Reihen in dieser Weise behandelt hat, formuliert hier die Analoga zu dem im Titel genannten Satz und formt den von Karamata vereinfachten Landauschen Beweis zu intuitionistisch strengen Beweisen um. Die Darstellung, auch der Beweise für einige funktionentheoretische Hilfssätze, ist ausführlich.

A. Heyting (Enschede).

Mulholland, H. P.: A further generalization of Hilbert's double series theorem. *J. Lond. math. Soc.* **6**, 100—106 (1931).

Es handelt sich darum, die Ungleichung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q} \quad (1)$$

mit $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $a_m \geq 0$, $b_n \geq 0$ so zu verallgemeinern, daß statt a_m^p , b_n^q die Zahlen $\Phi(a_m)$, $\Psi(b_n)$ verwendet werden, wo $\Phi(x)$ bzw. $\Psi(x)$ gewissen weiteren Voraussetzungen genügende, in $< 0, +\infty >$ erklärte, monoton wachsende Funktionen sind, für welche

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0, \quad \Phi(+\infty) = \Psi(+\infty) = +\infty, \quad \Phi^{-1}(x) \Psi^{-1}(x) = x \quad (2)$$

gilt (Φ^{-1} bzw. Ψ^{-1} ist die zu Φ bzw. Ψ inverse Funktion). Verf. beweist: 1. Wenn $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ die Bedingungen (2) erfüllen, $\Phi(x)$ konvex ist und außerdem für $x \geq 0$, $y \geq 0$ immer $\Phi(xy) \geq \Phi(x) \Phi(y)$ gilt, so besteht für $a_m \geq 0$, $b_n \geq 0$ die Ungleichung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq P \cdot \frac{\Phi^{-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Phi(a_m) \right]}{\Psi^{-1} \left[1 / \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(b_n) \right]}$$

mit

$$P = \int_0^{\infty} \frac{\Phi^{-1}(x) dx}{x(1+x)}.$$

Für $\Phi(x) = x^p$ folgt daraus genau (1). 2. Wenn (2) erfüllt ist und für ein konstantes K und beliebige $a_m \geq 0, b_n \geq 0$ die folgende Verallgemeinerung von (1) gilt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq K \cdot \Phi^{-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \Phi(a_m) \right] \cdot \Psi^{-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(b_n) \right],$$

so gibt es Zahlen $\lambda > 0, \beta > \alpha > 0$, so daß $\alpha x^\lambda \leq \Phi(x) \leq \beta x^\lambda$ ist für $x \geq 0$.
Birnbaum (Wien).

Preece, C. T.: Theorems stated by Ramanujan (XIII). J. Lond. math. Soc. 6, 95–99 (1931).

Die Arbeit handelt über die in Ramanujans „Collected Papers“, S. XXVIII bis XXIX und 352–353 als (4), (7), (8), (12), (13), (15) bezeichneten Probleme. Mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \left\{ \operatorname{Co} \nu \pi x + x^2 \operatorname{Co} \frac{\nu \pi}{x} \right\} = \frac{\pi^3}{90x} (x^4 + 5x^2 + 1) \quad (4)$$

bewiesen. Das nächste Theorem

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1) \{ \operatorname{Co}[(2\nu+1)\pi/2n + \cos(2\nu+1)\pi/2n] \}} = \frac{\pi}{8} \quad (7)$$

(n eine ungerade ganze Zahl)

wird ebenfalls abgeleitet mit Hilfe des Residuensatzes, hier angewandt auf das Integral

$$J(x) = \int_{(R)} \frac{\pi}{\cos \pi x z} \cdot \frac{1}{z(\operatorname{Co} \pi z + \cos \pi z)} dz \quad (|z| = R; x \text{ reell}).$$

Bei $R \rightarrow \infty$ (doch so, daß bei $|z| = R$ die Pole des Integranden vermieden werden) und Spezialisierung von x als ungerade ganze Zahl folgt (7). Die Formel

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 + ab^{2(\nu+1)}x^2}{1 + b^{2\nu}x^2} dx = \frac{\pi}{2(1+b+b^3+b^5+b^7+b^9+\dots)} \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 - ab^{2(\nu+1)}}{1 - ab^{2\nu+1}} \quad (8)$$

wird mit dem Hinweis abgetan, daß sie ein Spezialfall (für $n = \frac{1}{2}$) eines Hardyschen Resultates ist [Messenger of Math. 44, 18–21 (1915)]. Die Beziehung: bei

$$\frac{1}{2} \pi \alpha = \log \tan \left\{ \frac{1}{4} \pi (1 + \beta) \right\}$$

gilt

$$\left(\frac{1^2 + \alpha^2}{1^2 - \beta^2} \right)^1 \left(\frac{3^2 - \beta^2}{3^2 + \alpha^2} \right)^3 \left(\frac{5^2 + \alpha^2}{5^2 - \beta^2} \right)^5 \left(\frac{7^2 - \beta^2}{7^2 + \alpha^2} \right)^7 \dots = e^{\frac{1}{2} \pi \alpha \beta} \quad (12)$$

ist schon von Ramanujan im J. ind. math. Soc. 7, 93–96 (1915) bewiesen. Weiter beweist Verf. die allgemeine Kettenbruchformel

$$\begin{aligned} & \frac{a}{p+n} + \frac{pa^2}{p+n+2} + \frac{2(p+1)a^2}{p+n+4} + \dots \\ &= 2^p a (1+a^2)^{\frac{1}{2}(p-1)} \int_0^1 \frac{z^{p-1+n/V_{1+a^2}}}{[V_{1+a^2} + 1 + z^2 \{V_{1+a^2} - 1\}]^p} dz, \end{aligned}$$

aus der für $p = 1$ das Ramanujansche Theorem (13) folgt. (15) endlich besagt: Wird

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta^2}{n} + \frac{(2\alpha)^2}{n} + \frac{(3\beta)^2}{n} + \dots$$

gesetzt, so besteht die Beziehung

$$F(\alpha, \beta) + F(\beta, \alpha) = 2F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}\right).$$

G. Wiarda (Dresden).

Kogbetliantz, E.: Sur les développements de Jacobi. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 915—918 (1931).

Der Verf. betrachtet die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq +1$ nach den hypergeometrischen Polynomen $Jacobis$ ($T_{(x)}^{(\alpha, \beta)}$) und teilt mit, in welcher Weise die (C, δ) -Summierbarkeit der Reihe beeinflusst wird, wenn einer der Randpunkte (oder auch ein innerer Punkt) Unendlichkeitsstelle der Funktion $f(x)$ ist. Er stützt sich auf die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Lebesgueschen Konstanten. Die diesbezüglichen Angaben verallgemeinern die Ergebnisse, die Rau [J. f. Math. **161**, 237—254 (1929)] für durchweg stetige $f(x)$ gewonnen hat. — Die Resultate des Verf. entsprechen vollständig denen, die er für den symmetrischen Fall ($\alpha = \beta$) in der Arbeit: Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques... [J. d. Math. pure et appl. 9. sér. **3**, 107—187 (1924), vgl. insbes. S. 168] abgeleitet hat.
v. Koppenfels (Hannover).

Kovanko, Alexandre: Sur les classes de fonctions presque-périodiques généralisées. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. **9**, 1—24 (1931).

En introduisant la notion nouvelle de „fonction asymptotiquement uniformément sommable“ Kovanko obtient de nombreuses généralisations de la notion de fonction presque-périodique.
J. Favard (Grenoble).

Differentialgleichungen :

Carrus, S.: Intégration, sans signe de quadrature, de certains systèmes d'équations différentielles à coefficients quelconques. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 910—913 (1931).

Verf. gibt eine Methode an zur integrallosen Auflösung einer unterbestimmten Differentialgleichung der Form $f(dx_1, \dots, dx_n, t) = 0$ oder eines Systems von mehreren derartigen Gleichungen; $f(dx_1, \dots, dx_n, t)$ wird als homogen in den Variablen dx_1, \dots, dx_n vorausgesetzt. Es ergeben sich explizite Formeln für die Lösungen $x_1(t), \dots, x_n(t)$, die nur die Ausführung von Eliminations- und Differentiationsprozessen verlangen.
Lüneburg (Göttingen).

Dieudonné, J.: Sur les points singuliers des intégrales de certaines équations différentielles. Bull. Sci. math., II. s. **55**, 99—104 (1931).

Der Verf. versucht die bekannten Grenzen für die Anwendbarkeit der Methode der sukzessiven Approximationen für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ im Falle $|f(x, y)| < F(|y|)$ zu verbessern (wobei F ein Polynom oder eine ganze transzendente Funktion mit positiven Koeffizienten ist). Es werden z. B. die Gleichungen $y' = y^2 + \varphi(x)$, $y' = e^{y\varphi(x)}(|\varphi| < M)$ betrachtet und der Abstand zweier Pole eines Integrals der ersten abgeschätzt.
S. A. Janczewski (Leningrad.)

Gosse, R.: De la recherche d'une catégorie d'équations de la première classe. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1185—1186 (1931).

Bemerkung über die Transformierbarkeit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $s = p \cdot a(x, y, z, q) + b(x, y, z, q)$ mit einer Involution höherer Ordnung.
Willy Feller (Kiel).

Birnbaum, Zygmunt Wilhelm: Abschätzung der Eigenwerte eines Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems mit Koeffizienten von beschränkter Schwankung. Arch. Towarz. nauk. Lwów, Wyd.-mat. przyr. **5**, 223—232 u. dtsch. Zusammenfassung Nr 7, 1—2 (1931) [Polnisch].

Für die Eigenwerte des einfachsten Sturm-Liouvilleschen Problems

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda r(x) u(x) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) &= u(1) = 0, & r(x) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt die bekannte asymptotische Formel:

$$\lambda_n \sim \frac{\pi^2 n^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{r(x)} dx \right)^2}.$$

Ist $r(x) \geq 0$ stetig und $\sqrt[r]{r(x)}$ von beschränkter Schwankung im Intervall $< 0, 1 >$:

$$V_0^1(\sqrt[r]{r(x)}) = v < \infty,$$

so ist die obige Formel zu verschärfen durch die Ungleichungen

$$\lambda_n \geq \frac{\pi^2 n^2 \left(1 - \sqrt{\frac{v}{n}} - \frac{1}{n}\right)^2}{\left(\int_0^1 \sqrt[r]{r(x)} dx + \sqrt{\frac{v}{n}}\right)^2} \quad \text{für } n \geq v + 4,$$

$$\lambda_n \leq \frac{\pi^2 n^2 \left(1 + \sqrt{\frac{v}{n}} + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(\int_0^1 \sqrt[r]{r(x)} dx - \sqrt{\frac{v}{n}}\right)^2} \quad \text{für } n \geq \frac{v}{\left(\int_0^1 \sqrt[r]{r(x)} dx\right)^2},$$

$$\lambda_n \geq \frac{\pi^2 n^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\left(\int_0^1 \sqrt[r]{r(x)} dx + \frac{v}{[\sqrt{n}]}\right)} \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \dots,$$

wo $[\sqrt{n}]$ die nächste unterhalb \sqrt{n} liegende natürliche Zahl bedeutet. Der Beweis wird nach einer von R. Courant entwickelten Methode aus der Variationsrechnung geführt. S. Gradstein (Darmstadt).

Kurenskyj, M.: Zur Integrabilitätsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 121–128 (1931).

In mehreren Arbeiten (Ann. di Mat., IV. s. 8 — Proc. Lond. Math. Soc., II. s. 31 — Comptes Rendus 1930, usw.) entwickelt Verf. ein Verfahren, part. Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu integrieren, und macht in der vorliegenden Note davon Anwendung auf den Fall eines Systems zweier Gleichungen erster Ordnung der im Titel genannten Art. Sei das vorgelegte System

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2; z_1, z_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2; z_1, z_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left(p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i} \right)$$

und

$$\Phi(x_1, x_2; z_1, z_2; p_1^1, p_2^1; p_1^2, p_2^2) = \text{const.} \quad (1')$$

eine damit verträgliche Gleichung. Den Integrabilitätsbedingungen kann nach dem Verf., unter λ_i eine Wurzel der Gleichung

$$D_{11}^{12} \lambda^2 + (D_{21}^{12} + D_{12}^{12}) \lambda + D_{22}^{12} = 0,$$

$$D_{ij}^{k1} = \frac{\partial(F_1 F_2)}{\partial(p_i^k p_j^2)}, \quad D_{ij}^{k0} = \frac{\partial(F_1 F_2)}{\partial(p_i^k x_j)}$$

verstanden, bei $D_{12}^{22} \neq 0$, $D_{12}^{12} \neq 0$, $D_{21}^{12} \neq 0$ die Form erteilt werden

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i D_{11}^{12} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_1^2 \right) + D_{22}^{21} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_2^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} p_2^2 \right) \\ + \lambda_i D_{11}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^1} + D_{22}^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^1} + \lambda_i D_{11}^{21} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{20} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0, \\ (\lambda_i D_{12}^{21} + D_{22}^{21}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^1} + (\lambda_i D_{11}^{12} + D_{12}^{12}) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^1} + \lambda_i D_{21}^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$i = 1, 2$$

woraus Verf. folgenden Schluß zieht: Wenn eines der Systeme (2) durch ein part. Integral $\Phi_1 = c_1$ integriert werden kann, so ist dieses die Gleichung (1') und ist mit

(1) kompatibel. Bedeutet $\Phi_2 = c_2$ ein zweites part. Integral, so kann man aus den 4 voneinander unabhängigen, verträglichen Gleichungen

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \Phi_1 = c_1, \Phi_2 = c_2,$$

die p_i^k berechnen und die gesuchten Funktionen z_1 und z_2 durch Quadraturen aus

$$dz_k = p_1^k dx_1 + p_2^k dx_2 \quad (k = 1, 2)$$

gewinnen. Es folgt eine Besprechung der Spezialfälle, die eintreten, wenn in (1) gewisse p_i^k fehlen. Die Formulierungen leiden an manchen Stellen unter Unebenheiten.

E. Schuntner (Wien).

Wintner, Aurel: Upon a theory of infinite systems of non-linear implicit and differential equations. Amer. J. Math. 53, 241—257 (1931).

This paper is a summary of three earlier ones by the author, viz. Zur Theorie der unendlichen Differentialsysteme, Math. Ann. 95, 544—556 (1925); 98, 273—280 (1928), and Zur Analysis im Hilbertschen Raume, Math. Z. 28, 451—470 (1928). The elements $z = z_1, \dots, z_n, \dots$ are assumed to belong to a complex Hilbert space, i. e. such that $\sum |z_n|^2 < \infty$. A sphere $\sigma_r(z_0)$ ($\sigma_r = \sigma_r(0)$) consists of the elements z such that $\sum |z - z_0|^2 < r^2$. Fundamental in the argument is the notion of a power series regular in σ_r . Such a power series $\varphi(z) = \varphi(z_1, z_2, \dots)$ satisfies the conditions: (a) that the m th section $\varphi_m = \varphi(z_1, \dots, z_m, 0, 0, \dots)$ is a regular function of z_1, \dots, z_m in the m th section of σ_r , (b) that the m th section converges in m for all points of σ_r and (c) that for every $\varepsilon > 0$, there exists an $M_{r-\varepsilon}$ such that $|\varphi_m| < M_{r-\varepsilon}$ for $\sum_{n=1}^m |z_n|^2 < (r - \varepsilon)^2$. The systems of equations to be treated depend upon the notion of a bounded vector, and bounded matrix of power series, the power series φ_n regular in σ_r being such a vector, if the linear form $\sum \varphi_n x_n$ is bounded uniformly on σ_r , while $\varphi_{ij}(z)$ form a bounded matrix, if the bilinear form $\sum \varphi_{ij}(z) x_i y_j$ is limited uniformly on σ_r . If φ is a regular power series then $\partial \varphi / \partial z_n$ and $\partial^2 \varphi / \partial z_n \partial z_m$ are such a bounded vector and matrix respectively. In such a situation the following existence theorems hold: 1. If the vector φ_n is bounded on σ_r then there exists an α such that the system $dz_n/dt = \varphi_n(z)$, $z_n(0) = 0$ has as solution the functions $z_n(t)$ belonging to σ_r and holomorphic for $|t| < \alpha$. 2. If the vector φ_n is bounded on σ_r , the system $z_n = t \varphi_n(z)$ possesses a holomorphic solution $z_n = z_n(t)$ lying in σ_r for $|t| < \alpha$ (α suitably chosen). 3. If $\psi_n(z')$ is a bounded vector on σ'_r and ψ_n contains no constant or linear terms in z' , then the system $z_n = z'_n + \psi_n(z')$ possesses for r sufficiently small an inverse transformation in σ_r . The author insists that the usual existence proofs of the majorant type are not effective, which depends upon the fact that in multilinear forms limited in Hilbert space, the natural majorant is expressed in terms of the modulus of the form, and not in terms of the corresponding form of absolute values. Hildebrandt.

Schauder, Julius: Potentialtheoretische Untersuchungen. I. Abh. Math. Z. 33, 602—640 (1931).

Wenn eine für die Punkte P einer Fläche S definierte Funktion $f(P)$ die Ungleichung $|f(P_1) - f(P_2)| \leq C \cdot (Entfernung P_1 P_2)^\lambda$ erfüllt, so sagt man, daß $f(P)$ auf S einer H -Bedingung mit dem Exponenten λ genügt. Wenn besonders die Richtungs-cosinus der Flächennormale n_P einer H -Bedingung genügen, so heißt die Fläche vom Hölderschen Typus A_h . Die Abhandlung beschäftigt sich mit dem Potential einer Doppelschicht auf einer derartigen Fläche und seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung. Zunächst werden einige meist elementare Hilfssätze hergeleitet, die wohl zum Teil bekannt sind, aber in der Literatur nicht ausdrücklich bewiesen vorkommen. Teils sind diese Hilfssätze von geometrischem Charakter, teils bestimmen sie das Verhalten des Potentials bei der Annäherung an den Rand. In den Hauptsätzen wird das gegenseitige Verhalten von Belegung und Potential untersucht. Der Verf. beweist, daß bei einer gegebenen Belegung $f(P)$, die eine H -Bedingung erfüllt, das Potential der Doppelschicht einer H -Bedingung mit demselben Exponenten genügt,

nicht nur auf S , sondern auch im inneren des von S begrenzten Gebiets. Umgekehrt, wenn die Randwerte eines Potentials einer H -Bedingung genügen, so ist diese H -Bedingung in dem ganzen von S eingeschlossenen Gebiet erfüllt, und die entsprechende Belegung genügt einer H -Bedingung mit demselben Exponenten. Die hauptsächliche Bedeutung der Abhandlung liegt darin, daß alle Sätze für Flächen der Klasse Ah bewiesen werden, während bisher das Potential einer Doppelschicht nur für Flächen mit stetiger Krümmung untersucht wurde. In einem bei der Korrektur zugefügten Nachtrag werden ähnliche Sätze für das Potential einer einfachen Belegung hergeleitet.

L. Ahlfors (Åbo).

Integralgleichungen, andere Funktionalgleichungen:

Gelfond, A.: Sur l'ordre de $D(\lambda)$. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 828—831 (1931).

In this note (presented by J. Hadamard) a sketch is given of a proof of certain facts concerning the distribution of the characteristic values λ_n and the order of the Fredholm determinant $D(\lambda)$ of a given kernel $K(x, y)$, $a \leq x, y \leq b$, in the following three cases: (I) $K(x, y)$ is an entire function in y for each x on (a, b) ; (II) $K(x, y)$ is analytic in y in the domain $a - \delta \leq \Re(y) \leq b + \delta$, $-\delta \leq \Im(y) \leq \delta$ for each x on (a, b) ; (III) $K(x, y)$ has bounded derivative numbers of order n with respect to x and of order m with respect to y (the rôles of x and y can be interchanged in all these cases). Then

$$\log |D(\lambda)| = o(\log^2 |\lambda|), \quad O(\log^2 |\lambda|), \quad O\left(|\lambda|^{\frac{2}{2m+2n+1}}\right)$$

according as we have the case (I), (II) or (III) respectively, while $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = 0$

in case (I), and >1 in case (II). The method of proof consists in a transformation of the determinant $\det(K(x_i, x_j))$ which figures in the general term of the power series expansion of $D(\lambda)$, this transformation being different in each of the three cases above. It should be observed, however, that the results (I, II) (with more precise estimates than that of (I)) were obtained in 1928 by Hille and Tamarkin (Bull. amer. math. Soc. **34**, 423; Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **14**, 911—914) and are special cases of a general theory which is treated in a memoir of these authors to appear in a forthcoming number of the Acta math. As to the case (III), an analogous treatment was given by Mazurkiewicz [in the case $n = 1, m = 0, K_x(x, y)$ continuous] [C. r. Soc. Sci. Varsovie **8**, 805—810 (1915)].

J. Tamarkin (Providence, R. I., U.S.A.).

Strutt, M. J. O.: Die Nullstellen der Resolvente linearer Integralgleichungen. (Naturkundig Labor., N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven [Holl.].) Nieuw Arch. Wiskde **17**, 3—16 (1931).

In § 1 werden vorbereitende Hilfsbetrachtungen über meromorphe Funktionen $F(z)$ durchgeführt, welche die besondere Eigenschaft besitzen, daß $F(z)$ dann und nur dann reell ist, wenn z reell ist. Einfache Diskussion des Integrales der logarithmischen Ableitung von $F(z)$, genommen längs einer geschlossenen Kurve, liefert: Diese $F(z)$ haben nur reelle und einfache Pole und Nullstellen; zwischen zwei Polen liegt genau eine Nullstelle und umgekehrt. In § 2 und § 3 ist der Ausgangspunkt die Integral-

gleichung $f(x) = \eta(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \eta(y) dy$, deren Kern $K(x, y)$ stetig, reell, symmetrisch und positiv definit vorausgesetzt wird. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, bzw. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$. Die zugehörige Resolvente ist gegeben durch

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \Gamma(\xi, y; \lambda) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n - \lambda}. \quad (1)$$

Dann folgt: Für $0 < \lambda < \lambda_1$ ist $\Gamma(x, y; \lambda) > 0$, und ist umgekehrt $\Gamma(x, y; \lambda)$ im ganzen Bereich positiv, so ist $\lambda < \lambda_1$. Als Funktion von λ erfüllt, wie die Reihenentwicklung in (1) erkennen läßt, speziell $\Gamma(x, x; \lambda)$ die Voraussetzungen der $F(z)$ -Klasse. Also gelten für $\Gamma(x, x; \lambda)$ die obigen Sätze über Nullstellen und Pole. Dasselbe gilt

für jede Funktion $F(\lambda) = \int_a^b \int_a^b G(x, y) \Gamma(x, y; \lambda) dx dy$, wenn $G(x, y)$ integrierbar und alle $\int_a^b \int_a^b G(x, y) \varphi_n(x) \varphi_n(y) dx dy > 0$ sind. § 4 bringt als Anwendung einen neuen Beweis des folgenden Satzes von Routh: Sind $\sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i x_k$ und $\sum_{i,k=1}^n B_{ik} x_i x_k$ zwei positiv definite Formen mit symmetrischen Koeffizienten, so werden die Wurzeln der Säkulargleichung $\Delta \equiv |A_{ik} - \lambda B_{ik}| = 0$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) getrennt durch die Wurzeln der Gleichung $\Delta_{11} = 0$, wo Δ_{11} aus Δ durch Streichen der 1. Zeile und der 1. Spalte entsteht. In § 5 wird bewiesen: Ist für $a \leq x \leq b$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu + \lambda \varrho u = 0 \quad (p > 0, q > 0, \varrho > 0) \quad (2)$$

mit den Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$ vorgelegt, und ist $\Gamma(x, y; \lambda)$ ihre Resolvente, so teilt diese bei festem y als Funktion von x (oder umgekehrt) durch ihre Nullstellen das Intervall $a \dots b$ in n oder $n + 1$ Teilstrecken, wenn $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$ ist. Dabei sind die λ_n die Eigenwerte zu (2). Zum Schluß wird ein spezielles Beispiel behandelt und die Schwierigkeit der Übertragung auf höhere Dimensionen diskutiert.

G. Wiarda (Dresden).

Iglisch, Rudolf: Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. J. f. Math. **164**, 151—172 (1931).

E. Schmidt [Math. Ann. **65**, 370—399 (1908)] has developed a general method for solving integral equations of the form

$$w(s) + \int G(s, t) H[t, w(t)] dt = h(s), \quad H(t, w) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(t) w^r, \quad (*)$$

where s, t are points in an N -space, $a_r(t), h(s), G(s, t)$ are given real functions, the latter being symmetric, and the integration is extended over a given domain in N -space. The most interesting case is when the linear homogeneous integral equation

$$\varphi(s) + \int G(s, t) a_1(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (**)$$

has $n (> 0)$ linearly independent solutions $\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)$, the solutions of the adjoint of (**) being $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$. In the present paper which is a continuation of a previous one [Math. Ann. **101**, 98—119 (1929)] the author discusses questions of reality of solutions, which was not considered by Schmidt. He applies the method of Schmidt,

which consists in replacing the kernel $G(s, t)$ by another one, $E(s, t) = G(s, t) + \sum_{i=1}^n p_i(s) q_i(t)$,

that is possessed of a reciprocal [it should be noted that this kernel is precisely the one used by W. A. Hurwitz, Trans. Amer. Math. Soc. **13**, 405—418 (1912), in his theory of the pseudo-reciprocal kernel]. The problem then is reduced to a system of n non-linear equations in n parameters $\lambda_i = \int q_i(t) w(t) dt$ ($i = 1, 2, \dots, n$). The author restricts himself to the "general" case where $h(s) = \mu k(s)$, μ being constant and $k(s)$ not orthogonal simultaneously to all the functions $\psi_i(s)$. He shows that, by a suitable choice of the p 's and q 's, the values of $(n-1)$ parameters $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ can be reduced to zero, so that the whole problem depends on a single equation between λ_1 and μ , whose real solutions are now investigated. A detailed discussion is given only in the case $n = 2$ and with omission of some exceptional cases. One of the results is that, for sufficiently small values of $|\mu|$, there will be no real solutions if

$$a_2(t) \equiv 0 \text{ and } \Delta \equiv \left(\int a_2(t) \varphi_2^2(t) \varphi_1(t) dt \right)^2 - \int a_2(t) \varphi_2(t) \varphi_1^2(t) dt \cdot \int a_2(t) \varphi_2^2(t) dt < 0.$$

In the case $n > 2$ the author points out considerable difficulties of algebraic nature and a lack of proper information concerning reality questions. The paper closes with an application to the equation $\Delta u + \sin \text{hyp } u = 0$ whose treatment by H. Falckenberg (Diss. Erlangen, 1912), in the opinion of the author, was not complete.

J. D. Tamarkin (Providence, R.I., U.S.A.).

Hildebrandt, T. H.: Linear functional transformations in general spaces. Bull. amer. math. Soc. 37, 185—212 (1931).

Diese Arbeit enthält, von einem allgemeinen Standpunkt aus betrachtet, eine Darstellung der Theorie der linearen Funktionaloperatoren in Räumen, deren Metrik zunächst nicht als quadratisch vorausgesetzt wird. Sodann gibt sie einen Bericht über die Spektraltheorien von Hilbert, Hellinger und v. Neumann. *K. Friedrichs.*

Fouillade, André: Un théorème général d'itération. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1010—1011 (1931).

Une condition nouvelle pour la convergence des itérées d'une fonction formées au moyen d'une substitution fonctionnelle. Soit S une substitution fonctionnelle linéaire positive définie pour des fonctions $F(P)$ continues dans un domaine Ω à deux dimensions et sur sa frontière. On peut écrire la transformée $F_1(P)$ de $F(P)$ comme une intégrale de Stieltjes:

$$F_1(P) = \int_{\Omega} F(M) d_M K | (E p) |.$$

La fonctionnelle additive $K | (E p) |$ nous donne une distribution de masses positives dans le domaine Ω . Soit $G(P)$ le centre de gravité de ces masses. Avec ces notations on a le théorème: La convergence des itérées d'une fonction $F(P)$ est toujours réalisée, pourvu que la substitution S conserve l'unité, les valeurs périphériques et la continuité dans le domaine et sur sa frontière, et que $G(P) = P$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Montel, Paul: Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique. Ann. sci. École norm. supér., III. s. 48, 65—94 (1931).

It was stated by Weierstrass and proved by Phragmén [Acta Math. 7, 33—42 (1885)] and Koebe [Schwarz Festschr., 192—214 (1914)] that the only analytic solutions of the functional equation (*) $F[f(x), f(y), f(x+y)] = 0$, where $F(X, Y, Z)$ is a polynomial (which can be assumed to be irreducible) in its arguments, are algebraic either in x or in e^x , or in $\wp(x)$. Ritt [Trans. Amer. Math. Soc. 29, 361—368 (1927)] proved that the only solutions of (*) continuous on $(0, a)$ are piece-wise analytic on $(0, a)$ and that the interval $(0, a)$ can be subdivided into a finite number of subintervals $(0 = x_0, x_1), \dots, (x_{i-1}, x_i), \dots, (x_{n-1}, x_n = a)$ such that on (x_{i-1}, x_i) $f(x) = f_1(x + C_i)$ where C_i are constants and $f_1(x)$ is the analytic solution of (*) on $(0, x_1)$. In the §§ 1—7 of the present paper the author gives a proof of the above result of Ritt, the method of the proof being analogous to that of Ritt, with the main distinction that a more systematic use is made of the properties of the derivative numbers of the solution $f(x)$. In § 8 it is proved that a necessary condition that the solution of (*) be piece-wise analytic (rather than analytic) is that the algebraic surface $(S) F(X, Y, Z) = 0$ would possess three curves, situated in three planes parallel to the coordinate planes and equidistant from the origin, that are either multiple curves of the surface or else, curves of contact with the circumscribed cylinders whose generatrices are parallel to the coordinate axes. In §§ 9—11 various special cases are treated [$f(x \pm y) = R(f(x), f(y))$, $R(X, Y)$ rational, a polynomial, and entire function of finite order]. In the first case the solutions are linear fractions in x or in e^x ; in the second they reduce to linear functions in x or in e^x in the case of $(+)$, and to linear functions in x in the case of $(-)$; in the third case, with $(-)$, they are linear in x . In the concluding §§ 12—17 an extension is indicated to some special equations and systems of equations of a different type, and the question is raised whether the analyticity or piece-wise analyticity will be preserved under more general assumptions than the continuity of the solutions.

J. D. Tamarkin (Providence, R.I., U.S.A.).

Variationsrechnung:

Berwald, Ludwig: Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. Mh. f. Math. 38, 89—108 (1931).

Einem regulären Variationsproblem der Gestalt

$$\delta \int \Phi(p) du dv = 0 \quad (1)$$

für Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ in Parameterdarstellung, wo $\mathfrak{p} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ und Φ homogen von erster Dimension ist, kann nach A. Haar [Math. Ann. **100**, 481—502 (1928)] in folgender Weise ein adjungiertes Variationsproblem zugeordnet werden. Die Fläche \mathfrak{n} , die der Gleichung $\Phi(\mathfrak{n}) = 1$ genügt, heiße das Normalenbild von (1). Das Problem

$$\delta \int \Phi(\bar{\mathfrak{p}}) du dv = 0 \quad (2)$$

ist zu (1) adjungiert, wenn sein Normalenbild aus dem Normalenbild von (1) durch Polarität an der Einheitskugel hervorgeht. Die Beziehung der beiden Probleme ist also involutorisch. Jeder Extremalflche \mathfrak{x} von (1) läßt sich punktweise und involutorisch eine bis auf Translationen bestimmte Extremalflche $\bar{\mathfrak{x}}$ von (2) so zuordnen, daß $d\bar{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x} \times \bar{\mathfrak{n}}$ ist, wo $\bar{\mathfrak{n}}$ das Normalenbild von (2) ist. 2 solche Extremalflchen heißen adjungiert. Ist insbesondere (1) das Minimalflchenproblem, so fällt (2) mit (1) zusammen und adjungierte Extremalflchen gehen in adjungierte Minimalflächen über. Die Extremalflche \mathfrak{x} von (1) und das Normalenbild $\bar{\mathfrak{n}}$ von (2) stehen in der aus der Theorie der infinitesimalen Verbiegungen bekannten Beziehung zwischen Fläche und Drehri bei der Infinitesimalverbiegung $\bar{\mathfrak{x}}$. Es werden ferner die Beziehungen der obigen Begriffsbildungen zur relativen Differentialgeometrie hergestellt. So ist z. B. die Extremalflche \mathfrak{x} Relativminimalflche in bezug auf $\bar{\mathfrak{n}}$ als Eichfläche, entsprechend $\bar{\mathfrak{x}}$ in bezug auf \mathfrak{n} . A. Haar hat durch Einführung einer mit dem Variationsproblem invariant verknüpften quadratischen Maßbestimmung auf den Extremalflchen gewisse auf die ersten Ableitungen der Fläche bezügliche Eigenschaften adjungierter Minimalflächen auf beliebige adjungierte Extremalflchen übertragen. Verf. führt auf den Extremalflchen eine andere Maßbestimmung ein, mit deren Hilfe es gelingt, Eigenschaften 2. Ordnung der adjungierten Minimalflächen zu verallgemeinern. Diese Maßbestimmung erfüllt folgende Forderungen: 1. das Variationsintegral (1), erstreckt über ein Stück der Fläche, ist gleich dem Flächeninhalt des Stückes im Sinne der Maßbestimmung. 2. Im Fall des Minimalflchenproblems geht die Maßbestimmung in die durch die euklidische Maßbestimmung des Raumes auf der Fläche induzierte über. 3. Wird auf der adjungierten Fläche die entsprechende Maßbestimmung eingeführt, so sind die beiden Flächen längentreu aufeinander bezogen. Es wird eine solche Maßbestimmung angegeben und nachgewiesen, daß sie nur von den Ableitungen 1. Ordnung der Fläche abhängt. Als Anwendung wird u. a. eine Verallgemeinerung des folgenden Satzes von Darboux bewiesen: 2 aufeinander abwickelbare Flächen, bei denen entsprechende Linienelemente aufeinander senkrecht stehen, sind adjungierte Minimalflächen. Ferner werden alle Variationsprobleme bestimmt, deren nicht abwickelbare Extremalflchen Schiebflchen sind. Dies gelingt leicht durch Zurückführung auf einen Satz der relativen Differentialgeometrie von Duschek [Wien. Sitzungsber. **135**, 1—8 (1926)]. Als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich, daß das Normalenbild eine Mittelpunktsflche 2. Ordnung ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Douglas, Jesse: The least area property of the minimal surface determined by an arbitrary Jordan contour. (*Dep. of Math., Massachusetts Inst. of Techn., Cambridge.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 211—216 (1931).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **1**, 141) gab der Verf. die Existenz einer Minimalfläche, die durch eine beliebige Jordan-Kurve C des n -dimensionalen Raumes begrenzt wird, in dem Sinne, daß er n analytische im Einheitskreis reguläre Funktionen $F_i(\omega)$ angibt, deren Realteile $\Re(F_i(\omega))$ für $|\omega| = 1$ den Einheitskreis auf die Kurve C eindeutig stetig abbilden und die für $|\omega| < 1$ der Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n (F'_i(\omega))^2 = 0$$

genügen. Falls C überhaupt Rand einer Fläche endlichen Inhalts sein kann, so hat die konstruierte Minimalfläche kleinsten Flächeninhalt. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie diese Eigenschaft passend ausgedehnt werden kann auch auf solche C , die

diese Fähigkeit nicht besitzen: Nimmt man irgendeine im Innern des Einheitskreises liegende Jordan-Kurve J , so gibt die obige Abbildung auf die konstruierte von C berandete Minimalfläche eine Fläche kleinsten Inhalts, die von dem Bilde von J berandet werden kann, und zwar ist dieser Inhalt endlich. Der „unendliche Teil“ der Minimalfläche wird sozusagen nur von ihrem Rande geliefert. *Hans Lewy* (Göttingen).

Zermelo, E.: Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 114–124 (1931).

Es wird folgende Aufgabe behandelt: „In einer unbegrenzten Ebene, in welcher die Windverteilung durch ein Vektorfeld als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist, bewegt sich ein Fahrzeug mit konstanter Eigengeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luftmasse. Wie muß das Fahrzeug gesteuert werden, um in kürzester Zeit von einem Ausgangspunkte zu einem gegebenen Ziel zu gelangen?“ Diese Frage führt auf das folgende Variationsproblem: Es seien u, v bekannte Funktionen von x, z, t und es sei

$$\frac{dx}{dt} = u + \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v + \sin \varphi, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0; \quad x(\tau) = x_1, \quad y(\tau) = y_1.$$

Wie muß $\varphi = \varphi(t)$ bestimmt werden, damit bei fest vorgeschriebenem t_0, x_0, y_0, x_1, y_1 die Fahrdauer τ ein Extremum wird? — Als notwendige Bedingung für $\varphi(t)$ wird die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = -u_y \cos^2 \varphi + (u_x - v_y) \cos \varphi \sin \varphi + v_x \sin^2 \varphi$$

abgeleitet. Es wird das zugehörige Extremalenfeld konstruiert und es werden die hinreichenden Bedingungen für ein Extremum besprochen. (Dabei zeigen die Fälle $u^2 + v^2 < 1$ und $u^2 + v^2 > 1$ ein wesentlich verschiedenes Verhalten). Es wird die entsprechende Frage im dreidimensionalen Falle behandelt, wo an Stelle von (1) drei Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = u + \cos \vartheta \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v + \cos \vartheta \sin \varphi, \quad \frac{dz}{dt} = w + \sin \vartheta$$

treten und wo $\varphi(t)$ und $\vartheta(t)$ so zu bestimmen sind, daß die Fahrdauer (im oben angegebenen Sinne) extremal wird. *Rellich* (Göttingen.)

Kontinuierliche Gruppen, Differential- und Integralinvarianten:

Potron, Maurice: Sur un théorème fondamental de la théorie des groupes continus finis de transformations. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1302–1304 (1931).

Die vorliegende Note bezweckt die Präzisierung eines Nebenresultates einer früheren Abhandlung des Verf. über die Hauptsätze der Lieschen Theorie [Bull. Sci. math. **2** **51**, 91 und 101 (1927)]. Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ die Punkte im Darstellungsraum, $a = (a_1, \dots, a_r)$, ($n > r$) das Parametersystem für die Schar der Transformationen

$$S_a: x' = f(x|a).$$

Hintereinanderausführung der beiden Transformationen S_a, S_b ergebe

$$S_b S_a: x'' = f(f(x|a)|b) = f(x|c).$$

Hierdurch ist das Funktionensystem $c = g(a, b|x)$ erklärt. Gefragt ist, wann hierin g von x nicht mehr abhängt. Eine Rechnung zeigt, daß dies dann der Fall ist, wenn das Funktionensystem $x' = f(x|a)$ im wesentlichen den Bedingungen des ersten Lieschen Hauptsatzes genügt. Durch die $(n - r)$ unabhängigen Lösungen $J_\lambda(x')$, ($\lambda = 1, \dots, n - r$) des Gleichungssystems $X_h(z) = 0$, ($h = 1, \dots, r$), wobei die X_h die inf. Transformationen sind, wird vermöge $J_\lambda(x') = J_\lambda(x)$, ($\lambda = 1, \dots, n - r$), eine r -dimensionale Mannigfaltigkeit V_x im Darstellungsraum erklärt, die, da alle Funktionen $J_\lambda(x)$ die Schar der Transformationen S_a gestatten, durch alle S_a in sich übergeführt wird. Im Falle $n = r$ wird V_x der ganze Darstellungsraum. Dann bestimmt das Funktionensystem $c = g(a, b)$ eine der beiden Parametergruppen im Parameterraum als Darstellungsraum. *Schwerdtfeger* (Göttingen).

Berwald, Ludwig: Kleine Bemerkungen zur Theorie der ebenen Transformationsgruppen. Jber. dtsch. Math.-Verigg 40, 167—176 (1931).

Damit sich das Integral $s = \int \omega(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) dx$ bei Anwendung irgend-einer infinitesimalen Transformation $X = \xi \partial/\partial x + \eta \partial/\partial y$ auf den Integranden ωdx nicht ändert, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{X^{(k)}(\omega dx)}{dx} = X^{(k)}(\omega) + \omega \frac{d\xi}{dx} = 0,$$

wobei $X^{(k)}$ die k -te Erweiterung der infinitesimalen Transformation X ist, d. h.

$$X^{(k)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y''} + \dots$$

mit

$$\eta_{e+1} = \frac{d\eta_e}{dx} - y^{(e+1)} \frac{d\xi}{dx} \quad (e = 0, 1, \dots, k-1).$$

Setzt man weiter

$$p_i = \frac{\partial \omega}{\partial y^{(i)}} + \sum_{\lambda=1}^{k-i} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y^{(i+\lambda)}} \right), \quad H = \sum_{\kappa=1}^k p_\kappa y^{(\kappa)} - \omega,$$

so folgt hieraus: 1. Ein Spezialfall eines Satzes von E. Noether (Göttinger Nachr. 1918, 235—257), wonach, falls das Integral s die durch X erzeugte eingliedrige Liesche Gruppe gestattet, $\sum p_\kappa \eta_\kappa - H \cdot \xi = \text{const.}$ ein Integral der Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems $\delta s = 0$ ist. 2. Unter den gleichen Voraussetzungen über s ist längs jeder Bahnkurve der Gruppe: $\omega \cdot \xi = \text{const.}$, falls die Bahnkurve nicht parallel zur y -Achse ist. Sei nun ds das invariante Differential niedrigster Ordnung (das inv. Bogenelement) für die r -gliedrige Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen X_i ($i = 1, \dots, r$). Die Frage, um die es sich handelt, ist die nach einer allgemeinen Aussage über die Vereinfachung der Integration der Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems $\delta s = 0$ unter der Voraussetzung, daß s die Gruppe (X_i) gestattet. Es zeigt sich, daß man stets die Bestimmung der Extremalen des Variationsproblems auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Ordnung $2k - r + 1$ reduzieren kann. Der Beweis beruht unmittelbar auf dem Satz 1; die Schwierigkeit besteht wesentlich in der Durchführung einer zweckmäßigen Fallunterscheidung betr. die Beziehung zwischen k und r . Man hat in jedem Falle für jede der r erzeugenden infinitesimalen Transformation $X_i = \xi_i \partial/\partial x + \eta_i \partial/\partial y$ den ersten Satz anzuwenden. Ferner erhält man durch Anwendung des Satzes 2 mit der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} = \sum_{i=1}^r e_i X_i$$

folgenden Satz: Längs einer jeden Bahnkurve der von X erzeugten Gruppe ist, falls ds ihr Bogenelement ist, stets entweder $\omega \cdot \xi = \text{const.}$ die endliche Gleichung der betreffenden Bahnkurve, oder es ist eben dieser Ausdruck identisch konstant. Letzteres ist immer dann der Fall, wenn das Bogenelement der Gruppe integabel ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten des letzten Falles scheint nicht angebar zu sein. Endlich werden diese Sätze verwendet zum Beweis eines Lieschen Satzes über die quadraturlose Integrierbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche X gestatten; dabei wird weiter vorausgesetzt, daß das Bogenelement der Gruppe regulär ist, d. h. weder integabel noch von einem integablen nur um einen additiven Pfaffschen Ausdruck in x, y verschieden. Die Beweise sind in der Arbeit nur angedeutet.

Schwerdtfeger (Göttingen).

Gosse, R.: Des équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent un invariant du second ordre. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1522—1523 (1931).

Michal, A. D.: Function space-time manifolds. (Dep. of Math., California Inst. of Techn., Pasadena.) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 217—225 (1931).

Bedeutung y^1, y^2, \dots, y^n reelle Zahlen, y^x eine stetige Funktion der reellen Variablen x , so repräsentiert $(y^x, y^1, y^2, \dots, y^n) a \leq x \leq b$ einen Punkt im $(\infty + n)$ dimensionalen Funk-

tionenraum (function space). Verf. hat in mehreren Arbeiten die Eigenschaften solcher Räume untersucht. Für alle Formelbilder gilt die Grundregel: Latein. Index bedeutet die diskreten Zahlen $1, 2, \dots, n$, griech. Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \xi$, haben das Kontinuum (ab) zu durchlaufen, die griech. Buchstaben $\pi, \varrho, \dots, \omega$ durchlaufen die diskreten Zahlen $1, 2, \dots, n$ und das Kontinuum (ab) . Wiederholung der lateinischen Indizes fordert Summierung, Wiederholung der griech. α, β, \dots fordert Riemannintegration, Wiederholung der griech. Indizes $\pi, \varrho, \dots, \omega$ fordert beides, genommen über den wiederholten Index. Man kann z. B. affinen Zusammenhang in den Funktionenraum durch ein „Riemannsches“ Linienelement in der hier verwendeten Schreibweise

$$g_{\sigma\tau}[y^\pi] \delta y^\sigma \delta y^\tau + g_\sigma[y^\pi](\delta y^\sigma)^2 \\ g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}, \quad g_a = 0, \quad y_\alpha \neq 0$$

eintragen und darauf eine Geometrie aufbauen (composite geometry). Hier wird der Spezialfall $n = 1$ behandelt, wobei $y^1 \equiv t$ gesetzt, d. h. mit der Zeit identifiziert wird (function space-time manifold). Ein Punkt hat die Koordinaten (y^α, t) . Abgeleitet werden mehrere Sätze über Integralinvarianten. Ist

$$\frac{\partial y_j^\alpha}{\partial r} = f_j^\alpha[y], \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 1$$

ein vorgelegtes System von Integro-Differentialgleichungen, so werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß (in der hier verwendeten Ausdrucksweise) die Linearform

$$A_\alpha^i[y] \delta y_i^\alpha + A[y] \delta t$$

eine Invariante dieser Gleichungen sei, daß ferner die alternierende Bilinearform

$$A_\alpha^{ij} \delta_1 y_i^\alpha \delta_2 y_j^\alpha + A_{\alpha\beta}^{ij} \delta_1 y_i^\alpha \delta_2 y_j^\beta + A_\alpha^i \delta_1 y_i^\alpha \delta_2 t - A_\alpha^i \delta_1 t \delta_2 y_i^\alpha \\ A_\alpha^{ij} = -A_\alpha^{ji}, \quad A_{\alpha\beta}^{ij} = -A_{\beta\alpha}^{ji}$$

eine solche Invariante sei, ferner die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die genannten Formen „den Funktionaltrajektorien zugeordnete Invarianten“ seien, schließlich die Bedingungen für die relative Invarianz. *E. Schuntner* (Wien).

Funktionentheorie:

Frazer, H.: Some inequalities concerning the integrals of positive subharmonic functions along curves of certain types. *J. Lond. math. Soc.* 6, 113–117 (1931).

Der folgende Satz wird für beliebige positive, stetige, subharmonische Funktionen $U(z)$ bewiesen: Wenn C eine konvexe Kurve ist, die innerhalb des Kreises Γ liegt, so gilt für $\lambda \geq 2$

$$\int_C U^\lambda(z) |dz| \leq 4 \int_\Gamma U^\lambda(z) |dz|$$

und für $1 < \lambda < 2$

$$\int_C U^\lambda(z) |dz| \leq \frac{A}{\lambda - 1} \int_\Gamma U^\lambda(z) |dz|.$$

A ist eine absolute Konstante. Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines ähnlichen, von Gabriel bewiesenen Satzes über den absoluten Wert einer analytischen Funktion. Es wird noch gezeigt, daß das Resultat ein bestmögliches ist.

L. Ahlfors (Åbo.)

Birnbaum, Zygmunt Wilhelm: Über schlichte Funktionen. *Arch. Towarz. nauk. Lwow, Wydz.-mat. przyr.* 5, 233–237 u. dtsch. Zusammenfassung Nr 8, 1–2 (1931) [Polnisch].

Beweis der folgenden [bereits bei G. Szegő, *Math. Ann.* 100, 191 (1928) vorkommenden] Ungleichung für schlichte, durch $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ normierte Funktionen für $|x| < 1$:

$$\frac{1 - |x|}{1 + |x|} \leq \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1 + |x|}{1 - |x|}.$$

Aus ihr werden durch Integration Ungleichungen für $|f(x')/f(x)|$ hergeleitet, bei $|x| \leq |x'|$ und $\arg x = \arg x'$ bzw. bei $|x| = |x'|$ und $\arg x \leq \arg x'$. *W. Feller.*

Dieudonné, J.: Sur les fonctions univalentes. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1148—1150 (1931).

Der Verf. beweist die folgenden 3 Sätze: I. Bildet $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ den Einheitskreis $|z| < 1$ schlicht ab und sind die Koeffizienten a_v reell, so ist

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_k - a_{k-2}| \leq 2 \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Hieraus folgt $|a_n| \leq n$ ($n = 2, 3, \dots$). Man vermutet bekanntlich, daß diese Ungleichungen auch ohne Beschränkung auf reelle Koeffizienten Geltung haben. II. Fügt man zu den Voraussetzungen von I. hinzu: $f(z)$ sei ungerade ($a_2 = a_4 = \dots = 0$), so ist

$$|a_3| \leq 1, \quad |a_{2k-1}| + |a_{2k+1}| \leq 2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

III. Beschränkt man sich auf Polynome, deren Grad m nicht übersteigt, so ist

$$|a_2| \leq 2 \cos \frac{\pi}{m+3}, \quad |a_k - a_{k-2}| \leq 2 \cos \frac{\pi}{[m+1/k-1]+2} \quad (k = 3, 4, \dots, m+2).$$

Die Sätze werden auf bekannte Koeffizientenabschätzungen von trigonometrischen Reihen bzw. Polynomen, die eine reelle und das Zeichen nicht wechselnde Funktion darstellen, zurückgeführt. Die Brücke bildet das bekannte Schlichtheitskriterium: Eine Funktion $f(z)$ ist für $|z| < 1$ dann und nur dann schlicht, wenn

$$Q(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \neq 0$$

ist für $|z_1| = |z_2| < 1$. Setzt man

$$z_1 = z e^{i\vartheta}, \quad z_2 = z e^{-i\vartheta}, \quad (|z| < 1, \vartheta \text{ reell})$$

so wird

$$Q = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \frac{\sin v \vartheta}{\sin \vartheta} z^{v-1}.$$

Da die a_v als reell vorausgesetzt werden, so wird Q bei reellem z (unter den Voraussetzungen von II. auch bei rein imaginärem z) reell, ohne das Zeichen zu wechseln. Dasselbe gilt für $\sin^2 \vartheta Q$, das leicht nach ϑ trigonometrisch entwickelt werden kann. Auf diese Funktion werden die trigonometrischen Koeffizientenabschätzungen angewandt.

K. Löwner (Prag).

Shimizu, Tatsujirô: On equi-modular functions and their application. (*Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **13**, 79—92 (1931).

Sätze über Funktionen, welche in einem Kreisinge regulär oder meromorph sind und auf jedem der beiden Randkreise konstanten absoluten Betrag haben. Beispiel — Satz VI: Voraussetzung: $f(x)$ ist für $1 \leq |x| \leq R$ meromorph und $|f(x)|$ ist konstant für $|x| = 1$, $|x| = R$ und außerdem noch für $|x| = r$, $1 < r < R$. Die Zahl s sei durch $r^s = R$ erklärt. Behauptung: Ist s irrational, so hat $f(x)$ die Form $c_1 \cdot x^s$; ist s rational und q/p die irreduzible Darstellung von s , so ist entweder $|f(x)|$ konstant auf allen Kreisen $|x| = R^{t/q}$, $t = 1, 2, \dots, q-1$ und in den durch $R^{t-1/q} \leq |x| \leq R^{t/q}$ erklärten Kreisingen liegt für $t = 1, \dots, q$ abwechselnd mindestens je ein Pol oder eine Nullstelle — oder $f(x)$ hat die Form $c_1 \cdot x^s$.

Birnbaum (Wien).

Langer, R. E.: On the zeros of exponential sums and integrals. Bull. amer. math. Soc. **37**, 213—239 (1931).

Ein klarer, ausführlicher Bericht von dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse von der Verteilung der Nullstellen von Exponentialsummen und Integrale, erstattet an die Amer. Math. Soc. Im ersten Teil handelt es sich um die Nullstellen von Funktionen des Typus $\sum_{j=1}^n A_j(z) e^{a_j z}$ (Arbeiten von Birkhoff, Langer, Pólya, Schwengler, Tamarkin, C. E. Wilder). Dabei sind die Koeffizienten $A_j(z)$ entweder konstant oder asymptotisch konstant oder aber verhalten sich asymptotisch wie Potenzen.

Die Exponenten c_j sind reelle oder komplexe Zahlen. Die entfernten Nullstellen verteilen sich dabei auf endlich viele Streifen konstanter Breite, die von Exponentialkurven (ausnahmsweise Geraden) berandet sind und deren asymptotische Richtungen nur von den Exponenten abhängen. Auch asymptotische Formeln und die Wachstumsverhältnisse der Anzahlfunktion der Nullstellen sind bekannt. Im zweiten Teil

ist die Rede von Integralen des Typus $\int_a^b \psi(t) e^{zt} dt$ (oder den entsprechenden trigonometrischen Integralen mit $\cos zt$ und $\sin zt$ statt e^{zt}) (Arbeiten von Fr. Cartwright, Pólya und Titchmarsh). Wird $\psi(t)$ als integrierbar angenommen, so weiß man über die quantitativen Verhältnisse ziemlich gut Bescheid (Anzahlfunktion, Konvergenzeigenschaften der Nullstellenfolge). Um qualitative Aussagen machen zu können, muß $\psi(t)$ weitere Bedingungen erfüllen, und zwar ziemlich einengende, wenn sich z. B. die Nullstellen in einem Streifen konstanter Breite befinden sollen. Kurze Bibliographie. Hille (Princeton, N. J.).

Bol, G.: Über einige Substitutionsgruppen der komplexen Ebene. *Nieuw Arch. Wiskde* **17**, 55—61 (1931).

Verf. untersucht die linearen Substitutionen $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ der komplexen Zahlenebene, die zur Modulgruppe holodrisch isomorph sind, die sich also wie diese durch zwei elliptische Substitutionen U und T der Ordnung 3 bzw. 2 erzeugen lassen. Der Fall reeller a, b, c, d wird vollständig diskutiert und führt auf Substitutionsgruppen, die infinitesimale Substitutionen enthalten (kein Diskontinuitätsbereich) oder Gruppen mit einem Diskontinuitätsbereich. Wenn diese Gruppen nicht mit der Modulgruppe äquivalent sind — was vorkommt —, so liegen alle singulären Punkte der zugehörigen automorphen Funktion auf der reellen Achse, aber nicht überall dicht. Für den Fall komplexer a, b, c, d wird eine Übersicht über die vorkommenden Gruppen angegeben. S. Warschawski (Göttingen).

● **A. M. Legendre:** *Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung.* Hrsg. v. Fritz Emde. Stuttgart: Konrad Wittwer 1931. 81 S. u. 4 Abb. geb. RM. 3.50.

Auf photographischem Wege hergestellter Neudruck der Tafeln VIII und IX aus A. M. Legendres „*Traité des fonctions elliptiques*“, t. II, Paris 1826. Der Herausgeber hat 4 Figuren beigefügt, die den Verlauf der elliptischen Integrale als Funktionen ihrer beiden Argumente graphisch darstellen. Das Vorwort unterrichtet in knapper, klarer Weise über Einrichtung und Gebrauch der Tafeln. Bessel-Hagen (Bonn).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Molina, Edward C.: *Bayes' theorem: An expository presentation.* *Bell Syst. techn. J.* **10**, 273—283 (1931).

Es wird eine kritische Darstellung des sog. Bayesschen Problems gegeben, d. h. in allgemeiner Formulierung des folgenden Problems: Als Ursache eines vorliegenden Ereignisses komme eine von einer Anzahl Ursachen in Betracht; welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte von diesen Ursachen vorliegt? Der Verf. erläutert zunächst an Beispielen einige für die mathematische Behandlung wichtige Begriffe („a priori existence probability“ und „a priori productive probability“) und geht dann auf die mathematische Lösung ein, die für einen Spezialfall prinzipiell bereits von Bayes geleistet wurde. Schließlich werden kurz die Einwände gestreift, die gegen die Bayessche Lösung und deren Verallgemeinerung durch Laplace erhoben worden sind.

Lüneburg (Göttingen).

Loewy, Alfred: *Der Stieltjesche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik.* *Bl. Versich.math. (Beil. d. Z. Versich.wiss.)* **2**, 3—18 (1931).

Seit Woolhouse (*J. Inst. of Actuaries*, London 1869) arbeitet die Versicherungsmathematik mit Formeln, die differenzierbare Funktionen voraussetzen. Da aber die Anwendungen sich auf Gebiete, die sich sicherlich durch diskontinuierliche Sprünge verändern, beziehen, hat Verf. sich die Aufgabe gestellt, die Vorstellungen der Differential-

rechnung auszuschalten und dieselben Formeln — die ganz unentbehrlich sind — mit Hilfe des Stieltjesschen Integralbegriffes aufzustellen. Nachdem er im § 1 die ganz elementare, sogar ohne Kenntnis der Integral- und Differentialrechnung durchgeführte Aufstellung des Stieltjesschen Integrals gegeben hat, kommt in § 2 die finanztechnische Interpretation des (Stieltjesschen) Integralausdruckes für die einmalige Prämie einer nach dem Ableben fällig werdenden Todesfallversicherung, wobei also die Differenzierbarkeit der Absterbeordnungs-Funktion nicht gefordert ist. Im § 3 wird gezeigt, daß sowohl die Bestimmung des Deckungskapitals als auch die Prämienbestimmung der vom Verf. (in den Sitzgsber. Heidelberg. Akad. 1917, 6. Abhandlung) behandelten allgemeinen Versicherungsform mit n Ausscheidegründen keine Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Intensitätsfunktionen bedürfen. *Carl Burrau* (Kopenhagen).

Loewy, Alfred: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. II. Mitt. Drei Integralgleichungen für das Deckungskapital einer allgemeinen Personenversicherung. Bl. Versich.math. (Beil. d. Z. Versich.wiss. 31) 2, 74—82 (1931).

Den Gedankengang der I. Mitt. fortsetzend, werden zuerst einige Sätze über Stieltjessche Integrale, die im folgenden notwendig sind, gegeben und danach 3 Integralgleichungen, die durch das Deckungskapital der vom Verf. behandelten allgemeinen Personenversicherung befriedigt werden, aufgestellt. Verf. hat nachträglich bemerkt, daß eine dieser Gleichungen kürzlich durch A. Berger (Über das Äquivalenzprinzip, Skandinavisk Aktuarietidsskrift 1929, Upsala 1930, S. 211), auch unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Funktionen der Ausscheidordnung, aufgestellt worden ist. *Carl Burrau* (Kopenhagen).

Brelot, M.: Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. 9, 57—74 (1931).

L'auteur fait des objections critiques sur la théorie des fluctuations de deux espèces dévorante et dévorée due à Volterra et propose des équations un peu différentes pour des telles fluctuations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 \left[\varepsilon_1 - \lambda_1 N_1 - \nu_1 N_2 - \int_0^\infty F_1(\tau) N_2(t - \tau) d\tau \right], \\ &\quad \text{(espèce dévorée)} \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 \left[-\varepsilon_2 - \lambda_2 N_2 + \nu_2 N_1 + \int_0^\infty F_2(\tau) N_1(t - \tau) d\tau \right]. \\ &\quad \text{(espèce dévorante)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

On obtient des équations de Volterra en posant $\lambda_1 = \lambda_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. L'auteur suppose cependant

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \\ \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

On démontre, que des équations (1) ont une solution unique dans $(t_0, +\infty)$, si $N_1(t_0)$ et $N_2(t_0)$ sont déterminées. Les solutions $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont bornées supérieurement, ce qui correspond mieux aux conditions réelles, tandis que dans les hypothèses de Volterra des fluctuations sont illimitées. Plus précisément on a pour $t = +\infty$

$$\limsup N_1 \leq \varepsilon_1 / \lambda_1.$$

On distingue suivant la nature des coefficients deux cas: dans le premier $N_2(t) \rightarrow 0$, $N_1(t) \rightarrow \varepsilon_1 / \lambda_1$; dans le second on a un état stationnaire avec $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ et on obtient la loi des moyennes asymptotiques de Volterra:

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t N_1(t) dt \rightarrow N_1, \quad \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t N_2(t) dt \rightarrow N_2.$$

Sous certaines conditions supplémentaires on a simplement $N_1(t) \rightarrow N_1$, $N_2(t) \rightarrow N_2$.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Lévy, Paul: Nuove formule relative al giuoco di testa e croce. Giorn. Ist. ital. Attuari 2, 127—160 (1931).

Vollständige Darstellung von Untersuchungen des Verf., welche bereits in dies. Zbl. 1, 25 referiert wurden. Man gibt folgende exakte Formeln für die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ungleichungen:

$$P\{Y \geq N\} = 2P\{X > N\} + P\{X = N\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}P\{Z \geq N\} = P\{Y \geq N\} - P\{Y \geq 3N\} + P\{Y \geq 5N\} - \dots, \quad (2)$$

aus welchen die asymptotischen Formeln

$$P\{Y \geq y\sqrt{n}\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_y^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (3)$$

(diese Formel ist schon von Laplace bewiesen, vgl. auch Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4. russ. Aufl., 220—227)

$$P\{Z \geq y\sqrt{n}\} \sim 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_y^{3y} + \int_{5y}^{7y} + \dots \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (4)$$

entspringen. Für die komplementäre Wahrscheinlichkeit

$$P\{Z < y\sqrt{n}\} = 1 - P\{Z \geq y\sqrt{n}\}$$

hat man noch die Formel

$$P\{Z < y\sqrt{n}\} \sim 4/\pi \left(e^{-\frac{\pi^2}{8y^2}} - \frac{1}{8}e^{-\frac{9\pi^2}{8y^2}} + \frac{1}{8}e^{-\frac{25\pi^2}{8y^2}} - \dots \right). \quad (5)$$

In den Formeln (3) bis (5) ist $N = y\sqrt{n}$; wenn aber N von n unabhängig ist, so gilt

$$P\{Z < N\} \sim \frac{2}{N} \cot \frac{\pi}{2N} \cos^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2N}. \quad (6)$$

Weiter folgt noch die Untersuchung über die Verteilung der Zahlen n , für welche $X = 0$ ist und einige Bemerkungen anlässlich der früheren Untersuchungen des Verf. über das Gesetz des iterierten Logarithmus. A. Kolmogoroff (Moskau).

Murray, F. H.: Statistics of a set of closed intervals. Bull. amer. math. Soc. 37, 281—286 (1931).

Quelques formules pour des probabilités des différentes superpositions des intervalles éventuels disposés sur une droite. A. Kolmogoroff (Moskau).

Pearson, Karl, and Brenda Stoessiger: Tables of the probability integrals of symmetrical frequency curves in the case of low powers such as arise in the theory of small samples. Biometrika (Lond.) 22, 253—283 (1931).

Geometrie.

● Müller, Emil: Vorlesungen über darstellende Geometrie. Bd. 3. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Bearb. v. Josef Leopold Krames. Leipzig u. Wien: Franz Deuticke 1931. VIII, 303 S., 153 Abb. u. 1 Taf. RM. 32.—

Das Buch bildet den 3. Band der Vorlesungen über Darstellende Geometrie von Emil Müller (nicht des „Lehrbuchs“) und hat den Untertitel: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (1. Band: Die linearen Abbildungen, bearbeitet von Kruppa; 2. Band: Die Zyklographie, aus dem Nachlaß herausgegeben von Krames; der als 4. und letzter in Aussicht genommene Band soll die „Konstruktive Behandlung der Schraub- und Schiebflächen“ bringen). Das Buch stützt sich auf E. Müllers Vorlesungsaufzeichnungen und ist von Krames bearbeitet und ausgebaut worden. Es enthält eine ausführliche Theorie der Regelflächen und zwar vorwiegend in rein geometrischer Behandlung unter dem Gesichtswinkel der Darstellenden Geometrie. Die einschlägige ältere Literatur ist sorgfältig berücksichtigt, aber es sind auch zahlreiche neue, zum Teil bisher unveröffentlichte Ergebnisse herangezogen, die hauptsächlich der Schule E. Müllers entstammen und insbesondere von dem Bearbeiter herrühren. Das Buch zerfällt in 2 Teile, von denen der erste (Kap. 1—4) die Regelflächen im allgemeinen, der zweite die besonderen Regelflächen konstruktiv behandelt. Kap. 1 enthält die Grundbegriffe und die wichtigsten Ansätze auch für die rechnerische Untersuchung der Regelflächen. Kap. 2 behandelt die verschiedenen konstruktiven Erzeugungen der Regelflächen, erläutert u. a. am

Beispiel des geraden Kreiskonoids 4. Grades, des Wallisschen „Kegelkeils“ (Nr. 7), auf dem an späterer Stelle (Nr. 20, mit besonderer Tafel hinter S. 124) die Lichtgleichen konstruiert werden. Kap. 3 gibt die Differentialgeometrie der Regelflächen auf synthetischem Wege, gestützt auf die Theorie der Regelflächen 2. Grades. Kap. 4 behandelt die Regelflächen „im großen“; insbesondere werden die auf der Regelfläche gezogenen Kurven und die mit ihnen verknüpften Torsen betrachtet, wie Eigenschaftengrenzen, Umrißkurven, Isophoten, Fußpunktkurven, Striktionslinien und Haupttangentialkurven. Kap. 5 ist den Regelflächen 3. Grades im allgemeinen, Kap. 6 den besonderen Regelflächen 3. Grades gewidmet, vor allem dem Plückerschen Konoid (Cayleyschen Zylindroid) und der Cayleyschen Fläche. Das 7. Kap. endlich bringt die Regelflächen 4. Grades nach der Klassifikation von R. Sturm; insbesondere werden das Fréziersche Zylindroid, die Burmestersche Wringfläche und andere metrisch spezialisierte Flächen konstruktiv behandelt. Allen Kapiteln (außer dem ersten) sind Übungsaufgaben in größerer Zahl beigegeben worden, die zum Teil in Emil Müllers Vorlesungen verwandten Übungsblättern entnommen sind. Einige von ihnen sollen der Anregung zu eigener Forschung dienen. Das Buch gibt der großen Blüte, zu der die Darstellende Geometrie in Österreich gelangt ist, beredten Ausdruck. *Mohrmann (Darmstadt).*

● **Schilling, Friedrich: Projektive und nichteuklidische Geometrie. Bd. 1. Projektive Geometrie in analytischer Behandlung nebst einem Einblick in die Grundlagen der Geometrie.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. XI, 212 S. u. 157 Abb. geb. RM. 13.60.

● **Schilling, Friedrich: Projektive und nichteuklidische Geometrie. Bd. 2. Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlage der projektiven Geometrie.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. XI, 216 S. u. 175 Abb. geb. RM. 13.60.

Beabsichtigt ist eine möglichst eindringliche Darstellung des selbständigen axiomatischen Aufbaues der projektiven Geometrie, aus der dann die beiden nichteuklidischen Geometrien gleichberechtigt mit der euklidischen hervorgehen. Zugrunde gelegt wird ein endliches Gebiet der Ebene; meines Wissens ist dieser Standpunkt in einem Lehrbuch der projektiven Geometrie noch nicht durchgängig vertreten worden. Im übrigen führt der Wunsch des Verf. nach populärer Eindringlichkeit zu einer Darstellungsweise, die dem kritischen Leser das Eindringen in die Theorie kaum erleichtern dürfte. An den meisten schwierigen Stellen wird der Beweisgang unterbrochen und durch Andeutungen und Literaturzitate ersetzt unter Hinweis auf die Wichtigkeit der fortgelassenen Gedanken und auf einige historische Bemerkungen über ihre Entdeckung. Manche Einzelheiten bei der Einführung der im gegebenen Gebiet unerreichbaren Punkte durch den Desarguesschen Satz und bei der Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte der Geraden sind vielleicht von methodischem Interesse. Bemerkenswert ist auch der Schluß von Band 1: Topologische Verwirklichung der projektiven Ebene durch eine singularitätenfreie Fläche im Raum. Die von Hilbert, Boy und Verf. durchgeführten Untersuchungen dürften damit wohl zum erstenmal in ein Lehrbuch aufgenommen sein. Verf. führt die Konstruktion durch unter Beschränkung auf ein endliches Raumstück und ohne Benutzung metrischer Sätze. *Stefan Cohn-Vossen (Köln).*

Chiellini, Armando: Generazioni proiettive delle coniche, relative alle proiettività $(a, \mp b^2)$ tra i diametri delle coniche a centro ed estensione al caso della parabola. α^2, α Boll. mat. 27, 12—21 (1931).

Ciani, Edgardo: La configurazione costituita di due coniche cias una delle quali è inversa di se stessa rispetto all'altra. Period. Mat. 11, 43—49 (1931).

Takasu, Tsurusaburo: Einige neue räumliche Analogien des Cevaschen Satzes, die sich um Geradenquadrupel hyperboloidischer Lage betreffen. Sci. Rep. Tōhoku Univ. (Math. etc.) 20, 36—70 (1931).

Die Punkte p'_i seien 4 Punkte in den Ebenen eines Tetraeders p_i . Dann werden die Bedingungen dafür, daß die 4 Geraden $p_i p'_i$ linear abhängig sind, in der Gestalt von Relationen zwischen gewissen Doppelverhältnissen angegeben, welche ein fester Punkt q allgemeiner Lage mit den Punkten p_i und p'_i bestimmt. Das so gewonnene projektive räumliche Analogon zum Satze von Ceva wird auf zwei Weisen metrisch

spezialisiert und zum Beweise einer Anzahl von Sätzen über Quadrupel linear-abhängiger Geraden der Tetraedergeometrie verwandt. *E. A. Weiss (Bonn).*

Takasu, Tsurusaburo: Erweiterung von tetraedrischen Polen und Polaren zum Falle der Geradenquadrupel in hyperboloidischen Lagen. *Sci. Rep. Tôhoku Univ. (Math. etc.)* 20, 71—96 (1931).

Zu einer Geraden l_0 , die durch den Eckpunkt p_0 eines Tetraeders p_0, p_1, p_2, p_3 läuft, wird eine Gerade g_0 der gegenüberliegenden Tetraederebene folgendermaßen konstruiert: l_0 wird mit den 3 Kanten $p_0\hat{p}_i$ verbunden und die Verbindungsebenen werden mit den gegenüberliegenden Kanten zum Schnitt gebracht. Die Schnittpunkte seien $p_{23}^0, p_{31}^0, p_{12}^0$. Dann wird zu p_{23}^0 der Punkt p_{23}' gesucht, welcher p_{23}^0, p_2, p_3 zu einem Punktquadrupel mit vorgeschriebenem Doppelverhältnis $\varrho_{23}^{(2)} : \varrho_{23}^{(3)}$ ergänzt. Entsprechend ergeben sich die übrigen Punkte p_{ik}' . Genügen nun die Doppelverhältnisse einer bestimmten Bedingung, so liegen die Punkte $p_{23}', p_{31}', p_{12}'$ auf einer Geraden g_0 . Geht man jetzt von 4 Geraden l_i durch die 4 Tetraedereckpunkte aus, so kann man dadurch, daß man die 12 Doppelverhältnisse vier weiteren Bedingungen unterwirft, erreichen, daß 4 linear abhängigen Geraden l_i 4 linear abhängige Geraden g_i zugeordnet werden. So entsteht eine „Polaritätsbeziehung“ zwischen hyperboloidischen Geradenquadrupeln l_i und g_i , die dazu benutzt wird, aus bekannten hyperboloidischen Geradenquadrupeln neue Quadrupel derselben Art abzuleiten. *E. A. Weiss (Bonn).*

Bottema, O.: Über Moebius-Tetraeder. *Nieuw Arch. Wiskde* 17, 71—86 (1931) [Holländisch].

Neuberg hat gefunden, daß es möglich ist, auf jeder von 4 Geraden l_i 2 Punkte A_i und B_i so zu bestimmen, daß die Tetraeder A und B Moebius-Lage haben; wir haben dann eine Moebius-Figur, die in dem Geradenquadrupel beschrieben ist. Verf. findet, daß die Grassmannschen Doppelverhältnisse eines Geradenquadrupels, in welchem eine reelle Moebius-Figur beschrieben werden kann, positiv sind und umgekehrt. Dies ist der Fall, wenn a) die beiden Transversalen des Quadrupels konjugiert imaginär sind und b) die Transversalen reell und verschieden sind und die Quadrupele $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ der Schnittpunkte dieser Transversalen mit l_1, l_2, l_3, l_4 so sind, daß P_4 und Q_4 in übereinstimmenden bzw. durch P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 bestimmten Intervallen liegen. Die projektiven Eigenschaften einer Moebius-Figur werden vollständig charakterisiert von den Grassmannschen Doppelverhältnissen der Geraden $A_i B_i$. Verf. betrachtet die 4 Punkte A_i $t = \infty, 0, 1, d$ der Kurve $x = t^3, y = t^2, z = t, w = 1$ und die 4 Eckpunkte des Tetraeders, das gebildet wird von den Oskulationsebenen in den Punkten A_i . Beide Tetraeder haben 9fache hyperboloidische Lage, wenn das Doppelverhältnis der Punkte A_i äquianharmonisch, und 5fache hyperboloidische Lage, wenn das Doppelverhältnis der Punkte A_i harmonisch oder $= \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$ ist. Ferner findet Verf., daß mit jedem Quadrupel von windschiefen Geraden (mit positiven Grassmannschen Doppelverhältnissen) 4 reelle lineare Komplexe invariant verbunden sind. Jede in dem Quadrupel beschriebene Moebius-Figur kann auf 4 Arten in Moebius-Tetraeder verteilt werden, die 2 Tetraeder einer bestimmten Verteilung sind durch einen der 4 Komplexe einander zugeordnet. Diese Komplexe enthalten alle beide Transversalen des Quadrupels. Verf. interpretiert dieses Resultat mit Hilfe der Abbildung der linearen Komplexe auf die Punkte eines Raumes R_5 . *Schaake.*

Todd, J. A.: On twisted cubic curves which satisfy twelve conditions. *Proc. roy. Soc. Lond. A* 131, 286—306 (1931).

Zweck dieser Abhandlung ist die Bestimmung der Zahlen kubischer Raumkurven, welche der Bedingung $P^\alpha B^\beta \gamma$ ($2\alpha + 2\beta + \gamma = 12, \gamma \neq 0$) genügen. Diese Bedingung ist zusammengesetzt aus den folgenden Bedingungen: 1. I, daß die Kurve eine gegebene Gerade schneide; 2. B, daß sie eine gegebene Doppelsekante habe; 3. P, daß sie durch einen gegebenen Punkt gehe. Einige dieser Zahlen sind schon berechnet von Sturm, Schubert und van Kol; für die komplizierteren dieser Resultate gibt Verf. eine einfachere Bestimmung. Er betrachtet auch die Bedingungen Q, dafür, daß die

Kurve durch einen gegebenen Punkt gehe und eine gegebene diesen Punkt enthaltende Doppelsekante habe und R , daß sie durch einen gegebenen Punkt gehe und zwei diesen Punkt enthaltende Doppelsekanten habe. Im ersten Teil gibt Verf. Bestimmungen der Zahlen $P^3 B^2 I^2$, $P^5 I^2$ und $P^4 I^4$ und beschreibt 4 Cremona-Transformationen, mit deren Hilfe er viele der einfacheren Fälle erledigt. Im zweiten Teil berechnet er die übrigen Zahlen durch Ausartungen, aber ohne symbolischen Kalkül z. B. $P^2 B^2 I^4$ durch Wahl von b_1, l_1, l_2 in einer Ebene und $B^2 I^8$ durch Wahl einer Geraden B und von 2 Geraden l in einer Ebene. Zur Berechnung der Zahl $P^2 I^8$ werden für die 2 Punkte P und die 8 Geraden l bzw. 2 Punkte und 8 Geraden einer kubischen Fläche gesetzt und zur Berechnung der Zahl $P I^{10}$ werden für den Punkt P und 9 Geraden l bzw. 1 Punkt und 9 Geraden einer kubischen Fläche gewählt. Die Zahl I^{12} wird berechnet, indem vorausgesetzt wird, daß 10 Geraden l eine Doppelfünf einer kubischen Fläche bilden. Zum Schluß gibt Verf. eine Tafel von Zahlen kubischer Raumkurven, welche Bedingungen genügen, die zusammengesetzt sind aus P, Q, R, B und l . *Schaake* (Groningen.)

Milne, William P.: The tritangent circles of the circular quartic curve. J. Lond. math. Soc. 6, 90—95 (1931).

Aus der Umkehrung des Abelschen Theorems folgt, daß es 64 Kreise gibt, welche eine zirkuläre biquadratische Kurve vom Geschlechte 3 dreimal berühren. Verf. betrachtet diese Kreise vom geometrischen Standpunkt und findet Eigenschaften dieser Kreise, welche nicht mit Hilfe der Funktionentheorie gefunden sind. Er beweist die folgende Eigenschaft: „Wenn zwei biquadratische Kurven Γ und Ψ sich in 8 Punkten berühren, so schneidet eine kubische Kurve durch diese 8 Punkte Γ und Ψ in vier Berührungspunkten mit einem Kegelschnitte; die beiden berührenden Kegelschnitte U, U' berühren einander in zwei Punkten der kubischen Kurve. Wenn zwei solche kubische Kurven gezeichnet sind, so liegen die 8 Berührungspunkte der Kegelschnitte U, W mit Γ auf einem Kegelschnitte V und die 8 Berührungspunkte der Kegelschnitte U', W' mit Ψ auf einem Kegelschnitte V' ; ein Kegelschnitt des Büschels (V, V') besteht aus den Berührungssehn von U, U' und von W, W' .“ Verf. betrachtet den Fall, daß Γ zirkular ist und Ψ aus zwei Γ dreimal berührenden Kreisen besteht und findet so außer der Zahl 64 der Γ dreimal berührenden Kreise, mehrere Eigenschaften dieser Kreise. Er beweist auch, daß eine parabolische zirkuläre biquadratische Kurve 36 eigentliche dreimal berührende Kreise hat. Der Kegelschnitt C durch die drei Berührungspunkte eines solchen Kreises und die zwei Berührungspunkte einer Doppeltangente begegnet die biquadratische Kurve noch in drei Punkten, in welchen sie berührt wird von einer Parabel, deren Achse parallel ist zu der Richtung des unendlich fernen Berührungspunktes dieser Kurve. Der Kegelschnitt C begegnet dem Kreis noch in einem vierten Punkte; die Tangente in diesem Punkte ist parallel zu der Doppeltangente, welche die Parabel in dem vierten Punkte berührt, in welchem C ihr begegnet.

G. Schaake (Groningen).

Grosheide, G. H. A.: Anzahlen n -Strahlenfächer in einem Strahlenkomplex n -ten Grades. Nieuw Arch. Wiskde 17, 62—66 (1931) [Holländisch].

Es gibt n Strahlen eines Komplexes n -ten Grades, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen und in einer gegebenen Ebene durch P liegen. Der Komplex enthält ∞^5 solche „ n -Strahlenfächer“. Untersucht werden die Anzahlen dieser Fächer, welche verschiedenen, 5fachen Bedingungen genügen. Die von Schubert herrührenden Formeln werden nach einer anderen Methode neu gewonnen. *O. Bottema.*

Marletta, Giuseppe: Nell'Sr un notevole $(r-1)$ -complesso di C^r razionali normali. Atti Accad. Gioenia Catania 18, mem. II, 1—10 (1931).

Le curve C^r razionali normali di S_r che passano per $r+1$ punti indipendenti $P_i (i=1, 2, \dots, r+1)$, e che si appoggiano in $r-1$ punti variabili ad uno spazio Σ ad $r-2$ dimensioni (assegnato in S_r in modo generico), sono ∞^{r-1} , e possono tutte ottenersi come intersezioni — fuori di Σ — di $r-1$ iperquadriche indipendenti passanti per questo spazio e per i punti P_i . Le iperquadriche di S_r che soddisfanno a tali

condizioni, costituiscono un sistema lineare ∞^{r-1} ; ne consegue che per un punto generico di S_r passa una ed una sola delle suddette C^r , ossia queste ultime generano un $(r-1)$ -complesso, G , d'ordine 1. La classe di G [ossia il numero delle sue curve aventi come $(r-1)$ -secante un S_{r-2} assegnato in modo generico] è zero, e precisamente gli S_{r-2} $(r-1)$ -secanti le varie C^r son in tutto solo ∞^r , ciascuno di essi risultando appoggiato in $r-1$ punti ad $\infty^{r-2} C^r$. Più in generale si ha che gli S_k $(k+1)$ -secanti le varie C^r $(k=1, 2, \dots, r-2)$ sono solo ∞^r , ognuno di essi essendo appoggiato in $k+1$ punti ad $\infty^k C^r$. È notevole che le suddette proprietà valgano a caratterizzare il complesso G , avendosi che: Un $(r-1)$ -complesso algebrico — irriducibile e d'ordine 1 — di curve razionali normali di S_r , le quali complessivamente ammettano soltanto $\infty^r S_{r-2}$ $(r-1)$ -secanti distinti, non può essere che un $(r-1)$ -complesso del tipo dianzi considerato. *Beniamino Segre* (Roma).

Gerretsen, J. C. H.: Mitteilung über eine Untersuchung nach der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer birationalen Abbildung einer im dreidimensionalen Raume gelegenen algebraischen Fläche auf eine Ebene ohne Ausnahmepunkte. Nieuw Arch. Wiskde 17, 67—70 (1931).

Verf. beweist: „Es existiert in dem projektiven dreidimensionalen Raume R keine algebraische Fläche O vom Grade ≥ 2 , die sich derartig birational auf eine projektive Ebene π abbilden läßt, daß jeder Punkt von O einem und nur einem Punkt von π , und jeder Punkt von π einem und nur einem Punkt von O entspricht.“ Zum Beweis betrachtet Verf. die Kurven vom Grade n , die den ebenen Durchschnitten von O korrespondieren. Das System dieser Kurven in π hat keine Basispunkte; also hat eine allgemeine Kurve dieses Systems keine Singularitäten, und es gibt auf O keine Punkte von der Beschaffenheit, daß ein allgemeiner ebener Schnitt durch solch einen Punkt in diesem eine Singularität mit getrennten Tangenten aufweist. Der Grad der Fläche O ist n^2 ; die Klasse des allgemeinen ebenen Schnittes von O ist $3n(n-1)$. Die Formel $\nu + \sum(r-1) - 2n^2 = 2p - 2$ gibt nun $\sum(r-1) = 0$; also ist für jeden Zweig $r=1$. Etwaige Singularitäten können also nur getrennte Tangenten haben. Die Existenz von Singularitäten für den allgemeinen ebenen Schnitt von O liefert dann einen Widerspruch. *G. Schaake* (Groningen).

Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Tensoranalysis:

Burgatti, Pietro: Studio sulle varietà a due dimensioni appartenenti a un S_4 euclideo. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. 9, 121—142 (1931).

L'autore studia, con il metodo vettoriale, le proprietà delle superficie immerse in uno spazio a 4 dimensioni (S_4) facendole precedere da alcune considerazioni sulle curve in un S_4 .

[In questo riassunto sono citati i risultati ottenuti e, per comodo dei lettori e per i naturali riferimenti con i teoremi analoghi o corrispondenti a quelli che si hanno per le superficie, fra parentesi, sono indicate le pagine della „Analisi Vettoriale Generale“, Vol. II; Geometria differenziale di Burgatti, Boggio, Burali Forti (Ed. Zanichelli, Bologna).]

Curve. L'autore parte dalla osservazione che una curva in un piano ha una sola curvatura (flessione) e che l'aggiunta di una curvatura (torsione) trasporta la curva in un S_3 . Allora partendo da una curva in un S_3 , aggiungendo una nuova curvatura si ottiene una curva in un S_4 e per questa curva stabiliscono le formule di Frenet (p. 4). **Superficie.** Data una superficie in un S_3 , si dimostra che non è possibile, aggiungendo una nuova curvatura, ottenere — come per le curve —, una superficie in un S_4 . Sia allora una superficie immersa in un S_4 , si considerino due versori n_i ($i=1, 2$) perpendicolari fra loro ed entrambi ortogonali al piano tangente. Si introducano, come per l'ordinaria superficie nel S_3 (p. 34), le omografie fondamentali $\sigma_i = d_s n_i / dP$. Si dimostra che le σ_i sono dilatazioni. Denotando con c_{ih} ($h=1, 2$) le direzioni unite di σ_i , con procedimenti analoghi a quelli adottati per la superficie, si trovano la curvatura media (M_i) e la curvatura totale (K_i) relativamente alla normale n_i , cioè

$$I_1 \sigma_i = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} = M_i; \quad I_2 \sigma_i = \frac{1}{r_{i1} r_{i2}} = K_i$$

si dimostra che $\sqrt{M_1^2 + M_2^2}$ e $K_1 + K_2$ sono indipendenti dalla coppia di normali n_i che si considerano. A queste due grandezze si dà il nome di curvatura media e curvatura gaussiana. Nel piano normale individuato dalle due normali n_i esistono due normali ortogonali fra loro, privilegiate, per una delle quali la curvatura media è nulla. Nello studio delle superficie in un S_4 , converrà riferirsi a queste coppie (n, n') di normali principali; per esse sieno σ e σ' le omografie corrispondenti. Si potranno allora definire due coniche indicatrici (p. 41) che sono l'una ellisse o iperbole e l'altra iperbole equilatera; corrispondentemente vi saranno superficie a punti equiperbolici-iperbolici e superficie a punti equiperbolici-ellittici. Si definiscono le curve coniugate rispetto a n o a n' quando

$$\sigma(dP) \times \delta P = 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma'(dP) \times \delta P = 0$$

tali curve saranno autoconiugate rispetto a n o a n' , quando è soddisfatta una delle condizioni

$$\sigma(dP) \times dP = 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma'(dP) \times dP = 0.$$

Lungo tali curve lo spazio formato dalle due direzioni principali e da una normale, può essere osculatore, tali curve si possono chiamare curve asintotiche e per esse vale un teorema analogo a quello di Enneper (p. 42). Possono esistere curve coniugate tanto a n quanto a n' (curve biconiugate). Se in P e in $P + dP$ si considerano i due piani tangenti, solo se dP è una delle direzioni biconiugate i due piani si intersecano lungo una retta che è l'altra direzione biconiugata di quella (p. 43). L'autore conclude il suo studio mostrando come si possono trovare delle equazioni che sieno le analoghe di quelle di Frenet per le curve (di un S_4) (p. 49—54) e stabilisce poi le formule di Codazzi e di Gauss, analoghe a quelle trovate dal prof. Tonolo servendosi dei metodi consueti della geometria differenziale. *Giuseppe Aliprandi* (Padova).

Goormaghtigh, R.: Sur les courbes gauches qui sont des hélices sur deux cônes et les hélices cylindro-coniques. *Mathesis* 45, 131—139 (1931).

L'auteur désigne sous le nom d'hélices d'un cône les trajectoires d'angle constant des ses génératrices. Une courbe qui intercepte sous des angles constants les génératrices de deux cônes est tracée sur une surface de révolution dont la méridienne est une ovale de Descartes. Les sommets des cônes se confondent avec deux foyers non singuliers de la méridienne. Comme une ovale de Descartes a trois foyers non singuliers collinéaires, une hélice sur deux cônes en est également une sur un troisième et les sommets des trois cônes sont en ligne droite. Son plan rectifiant passant par un point fixe, la courbe considérée est géodésique sur un quatrième cône dont le sommet est situé sur la même droite. Partant de la relation intrinsèque caractéristique des hélices de cône, l'auteur déduit les équations intrinsèques des courbes en jeu. Si les inclinaisons de l'hélice sur les génératrices des deux cônes sont égales ou supplémentaires, l'ovale de Descartes dégénère en une conique, son troisième foyer non singulier va à l'infini et le troisième cône devient un cylindre dont la section droite est une cycloïdale et devient une développante de cercle, même une spirale logarithmique si la quadrique de révolution à qui appartient l'hélice est un paraboloïde ou cône. Cela corrige l'erreur soumise par Paul Serret dans la «Théorie nouvelle des lignes à double courbure» 1860 où il démontrait que chaque hélice cylindro-conique appartient à un cône de révolution. Pour le fin l'auteur étend sur ces hélices la propriété connue des développées successives de cycloïdales planes: leurs courbes polaires successives d'ordre pair sont homothétiques, ainsi que celles d'ordre impair; le centre d'homothétie commun est le centre de la quadrique de révolution à laquelle appartient l'hélice considérée. *Finikoff*.

Calapso, R.: Un teorema sullo spigolo di Green. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. 13, 266—268 (1931).

Neue Charakterisierung der Greenschen „canonical edge“ g einer Fläche S des projektiven Raumes: In einem Punkte P von S betrachte man die kubische Kurve C

durch 6 benachbarte Punkte einer Asymptotenlinie A sowie die Liesche $F_2:Q$; außer P haben C und Q drei weitere Schnittpunkte M_1, M_2, M_3 ; die 3 Schmiegeebenen an C in M_1, M_2, M_3 schneiden sich in M ; die Ebene durch M und durch die Tangente an C in P enthält die Greensche Gerade g .
Čech (Brno).

Dop, A. van: Über Strahlenkongruenzen, die zu einer Konstruktion von Beltrami in Beziehung stehen. Nieuw Arch. Wiskde 17, 51—54 (1931) [Holländisch].

Aus einer von Beltrami herrührenden Konstruktion für den Mittelpunkt geodätischer Krümmung geht hervor, daß 1. eine Normalenkongruenz, 2. eine Strahlenkongruenz, derer abwickelbare Flächen das Fokalblatt S_1 in Krümmungskurven schneiden, beide die folgende Eigenschaft haben: die Mittelpunkte geodätischer Krümmung der orthogonalen Trajektorien der Gratlinien auf S_1 , in den Fokalpunkten F_1 , sind identisch mit den entsprechenden Fokalpunkten F_2 . Der Verf. beweist, daß keine anderen Strahlenkongruenzen diese Eigenschaft besitzen. O. Bottema (Groningen).

Long: Sur les surfaces W . C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1299—1301 (1931).

Les surfaces de Weingarten sont définies par la propriété que l'un des deux rayons de courbure principaux est une fonction de l'autre. L'auteur démontre que cette définition est équivalente à la relation

$$hL - lH = 1 \quad (1)$$

où $ds^2 = H^2 du^2 + L^2 dv^2$ est l'élément linéaire de la surface en jeu rapportée aux lignes de courbure, $ds'^2 = h^2 du^2 + l^2 dv^2$ est celui de son image sphérique et les paramètres u, v sont convenablement choisis. La relation (1), qui d'ailleurs découle immédiatement de la démonstration analytique de Weingarten du théorème de Lie sur les lignes de courbure des surfaces W (Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1899, S. 245), traduit les propriétés suivantes: 1) le produit $1/HL$ est égal à la différence des courbures principales de la surface en question, 2) le produit $1/hl$ est égal au segment focal de la normale. En terminant l'auteur signale une classe des surfaces pour lesquelles H et L , la surface rapportée aux lignes de courbure et les paramètres bien choisis, sont fonctions l'un de l'autre. Les surfaces W , ainsi que les surfaces isothermiques en font partie.

S. Finikoff (Moskau).

Delgleize, A.: Développées de surfaces W . Mathesis 45, 140—144 (1931).

L'auteur poursuit l'étude des développées de M. Occhipinti [„Alcune formole per le falde dell'evoluta di una superficie“, Annali di Mat. 7 (1929)] dont il applique les formules aux deux classes des surfaces W : les surfaces W_1 à courbure constante et les surfaces W_2 satisfaisant à la condition $r_2 = Cr_1$ où r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux et C est une constante différente de l'unité. Les propriétés de leurs développées présentent beaucoup d'analogie. Les courbures totales K_1 et K_2 des deux surfaces développées S_1 et S_2 des surfaces en question satisfont à la relation $K_1/K_2 = (r_2/r_1)^2$, les torsions géodésiques T_{r_1} et T'_{r_1} des lignes $r_1 = \text{const}$ de S_1 et S_2 sont proportionnelles au carré des courbures géodésiques $1/\varrho_1$ et $1/\varrho_2$ des lignes de courbure de la surface W_1 ou W_2 c. à d. $T'_{r_1}/T_{r_1} = (\varrho_2/\varrho_1)^2$, les rayons des courbures normales R_{r_1} et R'_{r_1} des mêmes lignes sur S_1 et S_2 donnent lieu à la relation $\frac{R_{r_1}}{R'_{r_1}} = \mp \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ où le signe de dessus correspond aux surfaces W_1 et celle de dessous — aux surfaces W_2 . La dernière relation est caractéristique pour les surfaces en question.

S. Finikoff (Moskau).

Bydžovský, B.: Quadratische Involutionen im n -dimensionalen Raume. Čas. mat. a fys. 60, 214—224 u. franz. Zusammenfassung 224 (1931) [Tschechisch].

● **Thomas, Tracy Yerkes:** The elementary theory of tensors, with applications to geometry and mechanics. 1. edit. London: McGraw-Hill publ. Co., Ltd. 1931. IX, 122 S. geb. 10/—.

Bilimovitch, A.: Fondements géométriques de la théorie des diades et des affineurs. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 442—443 (1931).

Schouten, J. A.: Klassifizierung der alternierenden Größen dritten Grades in sieben Dimensionen. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 137—156 (1931).

Als Einleitung wird eine Übersicht über die bisherigen Ergebnisse auf dem Gebiete der Klassifizierung der alternierenden Größen 3. Grades gegeben. Ein einfacher kontravarianter p -Vektor in einer E_n (euklidisch-affine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen) wird dargestellt durch einen freien E_p -Teil mit p -Schraubsinn in seiner p -Richtung, ein einfacher kovarianter p -Vektor durch einen freien E_{n-p} -Zylinder mit p -Schraubsinn um seine $(n-p)$ -Richtung. Nach Wahl eines Ursprunges O kann der einfache kontravariante bzw. kovariante p -Vektor auch durch einen gebundenen durch O gehenden E_p -Teil bzw. E_{n-p} -Zylinder mit p -Schraubsinn dargestellt werden. Daneben wird noch eine dritte Darstellung in einer $E_{n-1} = \bar{E}_n$, die nicht durch O geht, benützt. Die Typen der Trivektoren für $n = 4, 5$ und 6 und ihre geometrischen Eigenschaften werden behandelt, es ergibt sich, daß für $n = 6$ nur zwei Typen vom Range 6 existieren. Auf Grund der geometrischen Eigenschaften für $n = 6$ wird dann die Bestimmung sämtlicher Typen für $n = 7$ durchgeführt. Dabei ist es wesentlich, daß sich der Maßvektor $\overset{7}{e}_\lambda$ so wählen läßt, daß $\overset{7}{e}_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ zweiblättrig wird und f in das alternierte Produkt von $\overset{7}{e}_\lambda$ mit einem zweiblättrigen Bivektor $v^{\mu\nu}$ und einem Trivektor auseinanderfällt, der ebenso wie $v^{\mu\nu}$ ganz im Gebiete von $\overset{1}{e}, \overset{2}{e}, \dots, \overset{6}{e}$ liegt. Es zeigt sich, daß es für $n = 7$ nur 5 Typen von Trivektoren vom Range 7 gibt. Eine Aufzählung der geometrischen Eigenschaften dieser Typen ist als Vorbereitung für eine Klassifizierung für $n = 8$ angeschlossen.

Karl Pingitzer (Wien).

Topologie:

Dorroh, J. L.: Some metric properties of descriptive planes. Amer. J. Math. 53, 401—421 (1931).

Unter „Descriptive plane“ wird hier ein System von Punkten verstanden, das den 8 ersten Axiomen von Veblen genügt. Es sind das die ebenen Anordnungs- und Verknüpfungsaxiome (ohne den Desarguesschen Satz). Die Topologie dieser „Ebenen“ wird dadurch bestimmt, daß die Dreiecksbereiche als Umgebungen angesprochen werden. Verf. gelangt zu folgenden Ergebnissen: Gibt es eine abzählbare Punktfolge mit Grenzpunkt, so läßt sich die Ebene metrisieren. Sind die Punkte irgendeiner Strecke separabel, so ist die ganze Ebene separabel. Es gibt metrisierbare nichtseparable und auch nichtmetrisierbare Ebenen.

Friedrich Levi (Leipzig).

Hurewicz, W.: Über Abbildungen von allgemeinen topologischen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Zahlenräume. Vorl. Mitt. Anz. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. Nr 12, 97—98 (1931).

In Verschärfung des bekannten Mengerschen Theorems, wonach jeder n -dimensionale Raum R sich auf eine Teilmenge des $(2n + 1)$ -dimensionalen Euklidischen Raumes E_{2n+1} topologisch abbilden läßt, spricht Verf. die beiden folgenden Sätze aus: 1. Ist R ein n -dimensionaler kompakter (metrischer) Raum, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung von R auf eine Teilmenge des E_{n+k} (k nicht negative, ganze Zahl), bei der für $m = 0, 1, \dots$ diejenigen Bildpunkte, denen mehr als m Originalpunkte entsprechen, eine höchstens $(n - m \cdot k)$ -dimensionale Menge bilden. 2. Es ist möglich, R auf eine Teilmenge von E_{n-k} eindeutig und stetig so abzubilden, daß für jeden Bildpunkt die zugehörigen Originalpunkte in R eine höchstens k -dimensionale Menge bilden.

Nöbeling (Wien).

Swingle, P. M.: Two types of connected sets. Bull. amer. math. Soc. 37, 254—258 (1931).

Die zusammenhängende Menge W heißt weitzusammenhängend, wenn jede ihrer zusammenhängenden Teilmengen auf W überall dicht ist. W heißt n -punktig zusammenhängend, wenn sie durch keine Untermenge von der Mächtigkeit n (n eine vorgegebene Kardinalzahl) zerlegt wird. Die Existenz der weitzusammenhängenden

Mengen wird durch den Satz gegeben: Jedes beschränkte unzerlegbare Kontinuum M des euklidischen Raumes enthält eine auf M überall dichte, weitzusammenhängende Untermenge. Die Eigenschaft, weitzusammenhängend zu sein, ist rekursiv, d. h. gilt für jede zusammenhängende Teilmenge einer solchen Menge. Die weitzusammenhängenden Mengen ergeben sich weiter als rekursiv n -punktig (n ganze Zahl) zusammenhängend. Ist die Menge W in einem euklidischen Raume eingebettet, so ist sie punktförmig. Als Beispiel einer n -punktig zusammenhängenden Menge dient jedes rekursiv unzerlegbare Kontinuum, also sind diese Mengen nicht immer punktförmig. *Róžańska.*

Zippin, Leo: On a problem of N. Aronszajn and an axiom of R. L. Moore. Bull. amer. math. Soc. **37**, 276—280 (1931).

Gegeben sei ein topologischer Raum R . Ein Aggregat von offenen Mengen in R heißt (bekanntlich) eine Überdeckung $\Pi_R(R)$, wenn die Vereinigungsmenge der Mengen dieses Aggregates sämtliche Punkte von R enthält. $\Pi_R(R)$ „definiert“ R , wenn seine Summanden ein den Raum R definierendes (d. h. jedem anderen äquivalentes) Umgebungssystem bilden. Erfüllt R die beiden folgenden Bedingungen (Axiome von N. Aronszajn): 1. Für jede natürliche Zahl n ist R durch $\Pi_R^n(R)$ definiert; 2. Jeder Folge von Mengen $\{U_n\}$, (U = offene Menge), $U_n \supset U_{n+1}$, entspricht ein Punkt p

des Raumes R , so daß $p = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ ist, und diese Folge gegen p konvergiert, so ist R eine

absolute G_δ -Menge, d. h. in jedem metrischen Raume $R' < R$ ist sie dem Durchschnitt einer abzählbaren Menge von offenen Mengen gleich. [Der Satz ist bekannt, unabhängig bewiesen von F. Hausdorff, W. Sierpiński, N. Wedenisoff (1926), publiziert: W. Sierpiński: „Sur les ensembles G_δ absolus.“ ersch. Fund. Math. N. Wedenisoff, Sur les espaces metriques complets. Journal de Math. (9) **9**, 377 (1930)]. Für metrische Räume sind die Bedingungen 1—2 einem früheren (1927) Axiom von R. L. Moore äquivalent, für allgemeine topologische Räume sind sie weiter, was durch ein Beispiel gezeigt wird. *Julia Róžańska* (Moskau).

Roberts, J. H.: Concerning metric collections of continua. Amer. J. Math. **53**, 422—426 (1931).

Es handelt sich um Mengen G (Upper semi-continuous and metric collections) von Punktmengen g mit folgenden Eigenschaften: 1. Die g sind zueinander punktfremde Kontinuen in einer festen Ebene. 2. Sind P_i und Q_i Punkte aus g_i und konvergiert die Folge der P_i für $i = 1, 2, \dots$ gegen einen Punkt P von g_p , so liegt jeder Häufungspunkt der Q_i gleichfalls in g_p . 3. G ist metrisch. Für diese Mengen G wird bewiesen: Erfüllen die Punkte von G eine stetige Kurve, so ist G selbst eine stetige Kurve (= metrische, zusammenhängende im Kleinen zusammenhängende, separable, im Kleinen kompakte Menge). Erfüllen die Punkte von G eine Ebene, so ist jedes zyklische Element von G homöomorph zu einer Teilmenge einer Sphäre, und G ist homöomorph zu einer Teilmenge eines Kaktoids; gibt es außerdem unter den Elementen g von G kein beschränktes, die Ebene zerlegendes Kontinuum und enthält dabei die Berandung jedes maximalen Bereiches von beschränkten Elementen g mindestens zwei solche Elemente, so ist G zu einer ebenen Punktmenge homöomorph.

Friedrich Levi (Leipzig).

Mechanik der Punkte und starren Körper.

● **Wolf, Karl:** Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme. Zum Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Wien: Julius Springer 1931. IX, 359 S. u. 250 Abb. geb. RM. 19.—.

Das Lehrbuch enthält in knapper Darstellung etwa den Lehrstoff der an den Technischen Hochschulen gehaltenen Pflichtvorlesungen über die Statik und Dynamik starrer Körper. Anschließend an die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung von ebenen und räumlichen Kräften werden die Elemente der Statik der Baukonstruk-

tionen und Fachwerke gegeben. Im 2. Teil wird die Dynamik des Massenpunktes gebracht. Der 3. Teil enthält die Elemente der Kinematik starrer Systeme mit einem Abschnitt über die Abbildung räumlicher Vektoren auf die Ebene nach Mayr-Mises. Der 4. Teil behandelt die Dynamik starrer Körper und enthält Abschnitte über den Kreisel, den Massenausgleich, den Stoß und über Seilschwingungen. Zum Schluß wird das Prinzip der virtuellen Verschiebung entwickelt und zur Ableitung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen und einiger anderer Anwendungen herangezogen.

K. Hohenemser (Göttingen).

Lochs, Gustav: Die Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven bei einer ebenen Bewegung. *Mh. f. Math.* 38, 39–52 (1931).

In einer ebenen Bewegung sind diejenigen Punkte der Punktbahnkurven und Hüllkurven in einem Augenblick der Bewegung ausgezeichnet, deren gewöhnliche Normalen durch den Momentanpol M gehen. Für diese Punkte werden hier die Affinnormalen berechnet und ihre Verteilung für gewisse Fälle mittels umfangreicher Rechnung untersucht und Konstruktionen dazu angegeben. — Wird in einem Punkte P die Affinnormale seiner Bahnkurve gezogen, so umhüllen die Affinnormalen aller Punkte einer durch M gehenden Geraden eine Hyperbel (im Falle des unendlich fernen Pols eine Parabel); die Affinnormalen aller unendlich fernen Punkte gehen dabei durch einen festen Punkt A , der für alle Systeme von Affinnormalen eine gewisse Rolle spielt. Die Affinnormalen derjenigen Hüllkurven, die durch Bewegung paralleler Geraden erzeugt werden, bilden ein Strahlbüschel. Analoges gilt auch für die Hüllkurven beliebiger Parallelkurven.

Eckhart (Wien).

Schuler, M.: Betrachtungen über die Stabilität bewegter Systeme. *Naturwiss.* 1931 I, 419–421.

Von der Routh'schen Stabilitätsdefinition für Bewegungen ausgehend, bezeichnet Schuler eine Lage (Geschwindigkeit oder Beschleunigung) als dynamisch stabil, wenn bei infinitesimaler Störung sich die gestörte Lage (Geschwindigkeit oder Beschleunigung) von der ungestörten nur unendlich wenig unterscheidet, auch nach unendlich langer Zeit. Das „indifferente“ Gleichgewicht der Potentialtheorie löst sich danach auf als ein Fall dynamisch labiler Lage, aber dynamisch stabiler Geschwindigkeit und Beschleunigung. Zur vollständigen Kennzeichnung des Gleichgewichtszustandes eines mechanischen Systems hat man außer dem dynamischen noch das energetische Gleichgewicht in Betracht zu ziehen. So ist z. B. bei einer aufschaukelnden Resonanzschwingung die Bewegung dynamisch stabil, aber energetisch labil. Die Begriffe lassen sich auf elektrodynamische Vorgänge sinngemäß übertragen.

Heesch (Göttingen).

Martin, Monroe: Upon the existence and non-existence of isoenergetic periodic perturbations of the undisturbed circular motions in the restricted problem of three bodies. *Amer. J. Math.* 53, 259–273 (1931).

Eine einparametrische analytische Schar von periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems ist von der Poincaréschen ersten Sorte, wenn der Scharparameter der Massenprozensatz ist und die periodische Lösung bei gegen Null konvergierendem Massenprozensatz in eine Keplersche Kreisbahn übergeht. Die Schar heißt isoenergetisch, wenn die Jacobische Konstante unabhängig von dem Massenprozensatz ist und daher durch die siderische mittlere Bewegung n der zum verschwindenden Massenprozensatz gehörigen Kreisbewegung eindeutig bestimmt wird. Levi-Civita [*Annali di Mat.* 5, 282ff. (1901)] hat mittels der Poincaréschen Anschmiegunsmethode gezeigt, daß die isoenergetische erste Sorte für diejenigen Werte der Jacobischen Konstante, bei welchen n dem Hillschen Periodenquotienten $m = 1/(n - 1)$ keinen ganzzahligen Wert erteilt, jedenfalls existiert (sofern man sich auf hinreichend kleine Werte des Massenprozensatzes beschränkt). Die Existenzfrage in dem kritischen Fall einer ganzzahligen Kommensurabilität, die nach der heute üblichen Terminologie „nichttriviale Verzweigungsgleichungen“ bedingt, blieb dabei dahingestellt.

Der Verf. zeigt nach Reduktion des Problems auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung (Mauvertuissches Prinzip) und unter Zugrundelegung nichtlinearer Existenzsätze für das unendliche System der Bedingungsgleichungen [Math. Annalen **96**, 284ff. (1926)], daß für kleine und für sehr große ganzzahlige Werte von m die isoenergetische erste Sorte nicht existiert. Nach derselben Methode wird auch der Levi-Civitasche Existenzsatz für nicht ganzzahlige Werte von m hergeleitet. *Wintner* (Baltimore).

Wavre, R.: Sur l'approximation d'ordre n dans la théorie des figures planétaires. Commentarii math. helvet. **3**, 12—21 (1931).

In Weiterführung der u. a. in derselben Zeitschrift erschienenen früheren Untersuchungen des Verf. über inhomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer zur verschwindenden Drehgeschwindigkeit gehörigen, also nach Lichtenstein radialsymmetrischen Gleichgewichtsfigur werden die Abweichungen der Niveauflächen von der Kugelgestalt und auch die Lösung der die gesuchte Gleichgewichtsfigur definierenden Funktionalgleichung als Potenzreihen der Drehgeschwindigkeit angesetzt. Es wird dann die naheliegende Bemerkung bewiesen, daß die Funktionen, welche die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind, aus den durch Vergleich der Koeffizienten sich ergebenden Bedingungsgleichungen rekursiv berechnet werden können, so daß die Lösung, sofern sie überhaupt existiert, auf eine formale Weise eindeutig bestimmt ist. Die Behandlung des eigentlichen Problems, nämlich der Existenzbeweis der gesuchten Lösung bzw. der Konvergenzbeweis für die angesetzten Reihen wird in Betracht gezogen, muß aber bei den vom Verf. ausschließlich verwendeten formal-elementaren Hilfsmitteln von vornherein scheitern und könnte heute, soweit der Referent sehen kann, erst im Rahmen der von Liapounoff und Lichtenstein ausgebildeten Methoden, dann aber ohne besondere Schwierigkeiten erbracht werden. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt daher in der Ausdehnung der klassischen Approximationsformeln von Clairaut und Laplace, die höhere Potenzen der Drehgeschwindigkeit vernachlässigen, auf beliebig hohe Teilsummen der formalen Potenzreihen. Vor allem aber sei eine im letzten Paragraphen gegebene elementare Diskussion der linearen homogenen Gleichungen hervorgehoben. — Liapounoffs weitgehende Untersuchungen über das Clairautsche Problem, die doch eben das nichthomogene, nahezu radialsymmetrische Problem behandeln, scheinen dem Verf. entgangen zu sein.

Wintner (Baltimore).

Rosenthal, Jenny E.: Note on the numerical value of a particular mass ratio in the restricted problem of three bodies. Amer. J. Math. **53**, 258 (1931).

Es seien μ und $1-\mu$ die beiden Massen in dem restringierten Dreikörperproblem, L_1 der zwischen diesen liegende und L_2 derjenige kollineare Librationspunkt, der von L_1 durch die Masse μ getrennt wird, endlich q_1 bzw. q_2 die Entfernung zwischen L_1 bzw. L_2 und der Masse μ . M. Martin [Amer. J. Math. **53**, 167ff. (1931); vgl. dies. Zbl. **1**, 73] hat u. a. gezeigt, daß q_1 und q_2 monotone Funktionen von μ sind, daß es aber in dem in Betracht kommenden Intervall $0 < \mu < 1$ einen und nur einen kritischen Wert gibt, für welchen $q_1 = q_2$ wird. Die Verf. berechnet aus den von Martin gegebenen Formeln diesen kritischen Wert des Massenprozentsatzes und findet die dicht am Rande des zulässigen Gebietes $0 < \mu < 1$ liegende Zahl 0,9992718..., während man nach oberflächlichen Symmetriebetrachtungen die Größenordnung $1/2$ erwarten würde. *Wintner* (Baltimore).

Eksergian, R.: Dynamical analysis of machines. J. Franklin Inst. **211**, 87—108, 225—242, 353—366, 495—505 u. 627—652 (1931).

Es ist schon öfter auf die Bedeutung der Lagrangeschen Gleichungen für die Getriebedynamik hingewiesen worden, die es gestatten, die Bewegungsgleichungen eines mehrläufigen Verbandes aufzustellen, ohne auf die Reaktionskräfte näher eingehen zu müssen. Der Verf. unternimmt es, die dynamische Analyse von Maschinen unter diesem einheitlichen Gesichtspunkte darzustellen, und wendet dieses Verfahren hauptsächlich auf Systeme mit zwei Freiheitsgraden an; die Differentialgleichungen der Be-

wegung werden aufgestellt, ohne daß auf deren Integration näher eingegangen wird. Von den Beispielen seien genannt: Hinterradantrieb eines Kraftwagens, dessen Motorblock selbst wieder federnd gelagert ist, Bewegung eines Planetengetriebes, dessen ruhender Zahnkranz mit Spiel ins kreisende Planetenrad eingreift, Schwingungen eines Zentrifugalreglers in Verbindung mit seiner Maschine, Torsionsschwingungen eines durch elastische Wellen und ein Übersetzungsgetriebe verbundenen Maschinenaggregats. Die Bewegungsgleichungen eines um eine Achse mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ rotierenden Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden werden allgemein untersucht. Die Zwangsbedingungen des Getriebes lassen sich in den Koordinaten x_r, y_r relativ zur rotierenden Ebene oder in den verallgemeinerten relativen Koordinaten α, β in der Form $F(x_r, y_r) = f(\alpha, \beta) = 0$ ausdrücken. Die Anwendungen des D'Alembertschen Prinzips und die Einführung eines Lagrangeschen Faktors liefern die Bewegungsgleichungen in den allgemeinen Koordinaten α und β . — Für Torsionsschwingungen von Kurbelwellen, bei denen die an den einzelnen Kurbeln anzubringen den reduzierten Trägheitsmomente A_1, A_2, \dots, A_3 , Funktionen der jeweiligen Drehwinkel $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ und die Zylinderdrücke und das widerstehende Drehmoment als mit der Drehzahl periodische Funktionen bekannt sind, werden die allgemeinen Differentialgleichungen angegeben, ebenso wird die Wirkung der Maschine auf die starr gedachte Grundplatte untersucht. — Für zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel wird zur Berücksichtigung der Gleitreibung eine Zerstreufunktion in die Energiegleichung eingeführt. Die bei der Schwingung auftretenden Koppelungs- und Trägheitskräfte lassen sich anschaulich in einem Vektordiagramm darstellen. Die Differentialgleichungen für eine rotierende horizontale Welle mit Scheiben von endlicher Exzentrizität werden mit Berücksichtigung des Eigengewichtes der Scheiben aus den Lagrangeschen Gleichungen abgeleitet, wobei sich die bekannte Tatsache zeigt, daß die Biegungs- und Torsionsschwingungen nur dann voneinander unabhängig sind, wenn die Exzentrizität der Scheiben gleich Null angenommen wird. Unter den üblichen Vereinfachungen spalten sich die Differentialgleichungen in die beiden bekannten Frequenzdeterminanten. — Zum Schluß werden am Beispiel des zweiläufigen Verbandes die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in den reduzierten Momenten a_{11}, a_{22}, a_{12} geschrieben (kinetische Energie des Verbandes $= \frac{1}{2}(a_{11} \dot{\Phi}_1^2 + a_{22} \dot{\Phi}_2^2 + 2a_{12} \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2)$, wo Φ_1 und Φ_2 die allgemeinen Koordinaten). G. Zieher (Stuttgart).

Uller, Karl: Die Entwicklung des Wellen-Begriffes. V. Gerlands Beitr. Geophys. 29, 252—266 (1931).

In verschiedenen früheren Abhandlungen hat sich der Verf bereits bemüht, den Unterschied seiner Meinung bezüglich des Wellenbegriffes gegen die allgemein übliche herauszuarbeiten. In der vorliegenden Arbeit werden die betreffenden Untersuchungen und Betrachtungen weitergeführt. Es werden die Feldbeziehungen der Plastik aufgestellt und versucht, sie unter bestimmten Annahmen zu lösen. Er gelangt so zu der nichtlinearen Differentialgleichung für w

$$f(w) \equiv w^2 + i \operatorname{div} w + (w \operatorname{grad} \chi) - a = 0.$$

Hier ist w ein komplexer Vektor, der sog. „Wellenvektor“, dessen Realteil w' sich auf die Flächen gleicher Phase und dessen Imaginärteil w'' sich auf die Flächen gleicher Amplitude bezieht. a und χ sind Wellenparameter. Es zeigt sich, daß in der Plastik zwei charakteristische Wellengattungen existieren. Für den Fall, daß es sich um „fast umkehrbare“ Wellen handelt, wie dies in der Praxis in vielen Fällen mit großer Annäherung zutrifft, läßt sich die angegebene Gleichung in die beiden folgenden zerfällen:

$$w^2 \approx a$$

$$\operatorname{div} w + w \operatorname{grad} \chi \approx 0.$$

Dieses Formelsystem wird auf Fluidik, Thermik, Diffusion, Elektromagnetik und Plastik angewandt. Aus den mathematischen Ergebnissen werden die physikalischen Folgerungen gezogen. Picht (Neubabelsberg).

Immler, W.: Der Flugzeugkompaß. Ann. Hydrogr. 59, 113—124 (1931).

In dieser Arbeit bespricht W. Immler die Fehler des Magnetkompasses, die durch die Beschleunigung des Flugzeuges entstehen. Bei einem Kurvenflug stellt sich die Schwingungsebene der Kompaßrose senkrecht zu der Resultante von Erdschwere und Beschleunigungskräften. Die Vertikalkomponente des magnetischen Erdfeldes verursacht, wie schon länger bekannt ist, infolge der Neigung der Kompaßrose Fehler in der Kompaßweisung. In höheren geographischen Breiten kann es sogar zu einem Überschlagen der Kompaßrose kommen. Der Fehler läßt sich am einfachsten durch einen Scheinpol erklären, der auf der Innenseite des Kreises auftritt, und der mit Flugzeugneigung und magnetischer Inklination anwächst. I. gibt ausführliche Formeln und Fehlertabellen, abhängig vom Kurs für verschiedene Breiten. Zum Schluß wird die Deviation eines Flugzeugkompasses durch festen und flüchtigen Magnetismus von Eisenteilen des Flugzeuges betrachtet. Während diese Fehler durch richtige Kompensation behoben werden können, läßt sich der im ersten Teil besprochene „Neigungsfehler“ nicht beseitigen.

M. Schuler (Göttingen).

Tear, J. D., and E. J. Lawton: Aircraft compass acceleration errors and their compensation. Gen. electr. Rev. 34, 265—268 (1931).

Es wird ein neuer Richtungsweiser für Flugzeuge beschrieben, der unabhängig sein soll von den „Neigungsfehlern“ der gewöhnlichen Magnetkompassse (s. d. vorangehende Ref.). Die Magnetpole eines elektrischen Generators werden induziert durch das magnetische Erdfeld. Die Spannung des Generators ändert sich deshalb mit dem Kurs. Eine Abweichung von dem eingestellten Kurse wird durch ein an dem Generator angeschlossenes Galvanometer angezeigt. Ebenso wie bei jedem Magnetkompaß tritt auch hier der „Neigungsfehler“ auf. Er soll aufgehoben werden durch einen Kreisel, der die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges mißt und einen entsprechenden Zusatzstrom auf das Galvanometer schaltet. Zu diesem Zweck müssen Flugzeuggeschwindigkeit, magnetische Inklination und Kurs des Flugzeuges an einem Brückenwiderstand entsprechend eingestellt werden. Ref. ist allerdings der Ansicht, daß sich solche komplizierte Instrumente nicht bewähren. Wenn man den einfachen Magnetkompaß verlassen muß, so ist es am richtigsten, den Kreiselkompaß zu verwenden. Denn dieser besitzt keinen Beschleunigungsfehler und deshalb auch keinen Neigungsfehler, wenn er auf die Schwingungszeit von 84 Minuten abgestimmt wird [Physik. Z. 24, 344 (1923)].

M. Schuler (Göttingen).

Mechanik der elastisch und plastisch verformbaren Körper.

Dreyer, Georg: Formelsammlung zur Festigkeitslehre und Elastizitätslehre. 5., verm. u. verb. Aufl. (Statik u. Festigkeit. Hrsg. v. Georg Dreyer. Bd. 4.) (Bibl. d. ges. Techn. Bd. 250.) Leipzig: Max Jänecke 1931. VIII, 154 S. RM. 3.30.

Boggio, T.: Une interprétation physique du tenseur de Riemann et des courbures principales d'une variété V_3 . C. r. Acad. Sci. Paris 192, 611—612 (1931).

Es wird gezeigt, daß der von Tonolo [C. r. Acad. Sci. Paris 190 (1930)] abgeleitete Satz, wonach sich ein von äußeren Kräften freies elastisches Kontinuum im Riemannschen Raume im Gleichgewicht befindet, wenn der Spannungstensor mit dem Riemannschen Tensor übereinstimmt, sich unmittelbar aus bekannten Formeln ergibt.

Willy Feller (Kiel).

Supino, Giulio: Sopra alcune limitazioni per la sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del De Saint Venant. Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. 9, 91—119 (1931).

Ausgehend von früher veröffentlichten Ungleichungen, die sich auf harmonische Funktionen und ihre Ableitungen beziehen, beweist der Verf. den folgenden Satz: Sind die Verschiebungen an der Oberfläche eines konvexen elastischen Körpers nur in einem kleinen Gebiet S von Null verschieden, so nimmt die Beanspruchung des Körpers ab, wenn man sich von diesem Gebiet entfernt, und geht in einem bestimmten Punkt, der nicht in S liegt, gegen Null, wenn S zusammen mit seiner größten Abmessung gegen Null geht, geht jedoch gegen einen endlichen Wert, wenn zwar S nicht, aber seine größte Abmessung gegen Null geht. Ein entsprechender Satz gilt auch für den Fall des ebenen Problems, bei dem nur ein kleines Stück des Randes Lasten trägt (Prinzip von de Saint Venant).

Prager (Göttingen).

Föppl, Ludwig: Konforme Abbildung ebener Spannungszustände. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 81—92 (1931).

In dieser Arbeit wird die Darstellung der Komponenten eines ebenen Spannungszustandes durch die zweiten Ableitungen einer Airyschen Spannungsfunktion F und die — erstmals anscheinend von Love angegebene — „komplexe Integration“ ebener Spannungszustände miteinander vereinigt und zur Ableitung neuer Lösungen des ebenen Spannungsproblems verwertet. Diese komplexe Integration beruht darauf, daß sich die Gleichgewichtsgleichungen in den Verschiebungen ξ, η ausgedrückt, in einer Form schreiben lassen, die zeigt, daß

$$\frac{2m}{m-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \equiv \frac{2}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + 2i\omega$$

eine Funktion des komplexen Argumentes $x+iy$ ist. Die Verknüpfung führt auf die bekannte Aussage, daß sich jede Lösung der Bipotentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$ unter gewissen Voraussetzungen in einer der zueinander konjugierten Formen

$$F = \frac{E}{4} (y\varphi_1 - \xi'_1) \quad \text{oder} \quad G = -\frac{E}{4} (x\varphi_1 - \xi''_1)$$

ansetzen läßt, wobei $\varphi_1, \psi_1, \xi'_1, \xi''_1$ Potentiale, und zwar φ_1, ψ_1 zueinander konjugiert sind. Weiters wird der Satz verwertet, daß dann auch $y\varphi_1 - x\varphi_1$ ein Potential ist. Es kann auf diese Weise jedem Bipotential (d. i. jedem beliebigen ebenen Spannungszustand) ein Potential, als ein sog. „harmonischer Spannungszustand“ zugeordnet werden, aus dem durch konforme Abbildung neue ebene Spannungszustände abgeleitet werden können. Das Verfahren wird ausgeführt für eine mit einem elliptischen Loch versehene Scheibe, die einer einachsigen Zugbeanspruchung unterworfen ist. (Zur Berichtigung sei angeführt, daß J nach Gl. (48) nicht, wie es dort heißt, die zu H konjugierte komplexe Funktion, sondern den zu H konjugierten Teil der komplexen Funktion $K(z)$ darstellt.)

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Fischer, O. F.: Näherungslösung zur Ermittlung der wirklichen Spannungsverteilung an konzentriert belasteten Zylinderenden. *Ing.-Arch.* **2**, 178—189 (1931).

Der Verf. versucht, die Spannungsverteilung in einem langen Kreiszyylinder zu bestimmen, der in den Mittelpunkten seiner beiden Endflächen entgegengesetzt gleiche axiale Einzellasten trägt. Er geht dabei aus von den Stromlinien für eine Strömung durch eine kleine Öffnung im Mittelpunkt des Bodens eines Kreiszyinders und sucht einen Spannungszustand, der diese Linien zu Spannungstrajektorien hat. Die axialen Spannungen im mittleren Querschnitt des Zylinders werden als gleichmäßig verteilt, die Umfangsspannungen σ_t in diesem Querschnitt zu Null angenommen, und die Laméschen Gleichgewichtsbedingungen unter teilweiser Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingungen näherungsweise integriert. Die so erhaltene Spannungsverteilung genügt allerdings nicht allen Vereinbarkeitsbedingungen für die Spannungen, ermöglicht aber doch eine ungefähre Vorstellung der wirklich eintretenden Spannungsverteilung.

Prager (Göttingen).

Larard, C. E.: General solution of the portal frame structure for the determination of the fixing couples and reactions at the joints. *Philosophic. Mag.*, VII. s. **11**, 1104 bis 1112 (1931).

Der ebene, dreiteilige Fundamentrahmen mit zwei steifen rechtwinkligen Ecken und zwei eingespannten Enden wird für einfache Belastung nach dem Prinzip vom Minimum der Formänderungsenergie abermals mit bekanntem Ergebnis durchgerechnet.

G. Mesmer (Göttingen).

Gassmann, F.: Über Querschwingungen eines Stabes mit Einzelmasse. *Ing.-Arch.* **2**, 222—227 (1931).

Es wird die Frequenzgleichung aufgestellt für die Querschwingungen eines Stabes, der auf einer Seite eingespannt ist und auf der anderen Seite eine starre Masse trägt. Der Schwerpunkt dieser Masse liegt weiter außerhalb als das Stabende. Die Rotations-

träglichkeit der starren Masse wird berücksichtigt, die des Stabes vernachlässigt. Es wird ein Weg angegeben, um das System so zu dimensionieren, daß in einem bestimmten Frequenzbereich keine Resonanz liegt und das Stabmaterial nicht über die zulässige Spannung hinaus beansprucht wird. *K. Hohenemser (Göttingen).*

Steinbach, A.: Die Eigenschwingungszahlen eines auf elastischem Boden ruhenden Fundaments. *Z. techn. Physik* **12**, 289—292 (1931).

Die freien Schwingungen eines starren Körpers (Maschinenfundament einschließlich Maschine), der auf einer elastischen, masselosen Schicht ruht, werden untersucht und der Einfluß von Schwerpunktslage und Größe der Trägheitsradien auf die Schwingungszahlen ermittelt. *Prager (Göttingen).*

Roß, M., und A. Eichinger: Weitere Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 254—262 (1931).

Schlechtweg, H.: Ein nichtlineares Elastizitätsgesetz bei rotierenden Kreisscheiben. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 97—105 (1931).

Die beobachtete Bruchspannung in Schleifscheiben ist ungefähr zweimal so groß wie die auf Grund eines Zugversuchs und der klassischen Elastizitätstheorie berechnete Bruchspannung. Versuche an Sandstein haben ergeben, daß kein lineares elastisches Verhalten ($\sigma = \varepsilon/E$) vorliegt, sondern daß die Verhältnisse praktisch durch $\sigma = \varepsilon/A + B\varepsilon$ ausgedrückt werden. Vorliegende Arbeit berechnet die Spannungen in einer ebenen rotierenden Kreisscheibe mit diesem Elastizitätsgesetz. Die Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} P_{rr} - \frac{1}{r} P_{\varphi\varphi} + \varrho \omega^2 r = 0 \quad (1)$$

wird, wenn die radiale Verzerrung mit s bezeichnet wird:

$$Ars'' - \left(\frac{s}{Ar + Bs} - \varrho \omega^2 r^2 \right) (A + Bs')^2 + (A + Bs')s' = 0, \quad (2)$$

(in der Arbeit enthält die Formel einen Druckfehler). Die Gleichung wird integriert nach einem Verfahren von Wentzel und Brillouin durch den Ansatz:

$$s(r) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} B^{\lambda} s_{\lambda}(r), \quad (3)$$

wo die s_{λ} auch noch von A abhängen. Die Funktionen s_0 , s_1 und s_2 werden berechnet; (s_2 ist schon eine halbe Seite lang); für die höheren s -Funktionen wird eine Rekursionsformel gegeben. Über die Konvergenz der Lösung wird nichts gesagt. Aus der Näherungslösung $s = s_0 + Bs_1$, wird geschlossen, daß die Tangentialspannungen am inneren Rand in erster Annäherung von B unabhängig sind. Somit erklärt diese Theorie die Diskrepanz mit den Bruchversuchen auch nicht. Weitere Ausführungen finden sich in *Ing. Archiv* **1931**, Bd. 2, Nr. 3 und *Z. Ver. D. Ing.* **1931**, 300.

Den Hartog (Pittsburgh).

Kluge, F.: Zur Ermittlung kritischer Drehzahlen von Kurbelwellen. *Ing.-Arch.* **2**, 119—139 (1931).

Die klassische Methode zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen der durch Torsion hervorgerufenen Schwingungen von Kurbelwellen ersetzt die gesamte kinetische Energie sowohl der rotierenden als auch der hin- und hergehenden Massen durch ihren zeitlichen Mittelwert. Die Aufgabe führt der Zahl der vorhandenen Massen und Kurbelkröpfungen entsprechend auf ein System von n linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wobei die Störungsfunktion — der Tangentialdruck — durch eine Fouriersche Reihe dargestellt wird. Die Bestimmung derjenigen Drehzahlen, bei denen „unendlich“ große Ausschläge auftreten, führt auf eine Determinante n -ten Grades, die bequem mit Iteration gelöst werden kann. Diesen Weg prüft nun der Verf. durch einen genauen von den Lagrangeschen Gleichungen ausgehenden Ansatz. In dem dabei sich ergebenden System von n Differentialgleichungen 2. Ordnung, 2. Grades werden Vereinfachungen getroffen derart, daß die von dem Zustand der gleichförmigen Rotation wenig verschiedene Bewegung untersucht wird. Es wird das Quadrat der elastischen Verdrehung vernachlässigt, jedoch nicht unmittelbar das ihrer ersten Ableitung. Statt dessen wird eine neue Koordinate Q einge-

führt und die Veränderliche durch diese mit Hilfe der Taylorsche Reihe bis zur 1. Ordnung approximiert. Die nunmehr aus den Lagrangeschen Gleichungen unter Vernachlässigung kleiner Änderungen des Tangentialdrucks gewonnenen Differentialgleichungen sind dann solche 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten, doch inhomogen. Diese Differentialgleichungen enthalten als Parameter den Wert ω der mittleren Winkelgeschwindigkeit. Gesucht sind nun solche Werte ω , für welche die Lösung der Gleichungen mit der Zeit über alle Grenzen wächst (Eigenwertproblem!). Die Theorie der Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten (Floquet, C. L. Charlier, H. Poincaré, G. Dorner) zeigt, daß dies eintritt, wenn die homogene Diffgl. periodische Lösungen besitzt (abgesehen von Sonderfällen, die der Vernachlässigungen wegen keine Rolle spielen, mechanisch auch nicht auftreten können). Die gesuchte periodische Lösung der homogenen Gleichung wird als Fourier-Reihe angesetzt (entsprechend dem Ritzschen Verfahren), deren Koeffizientenzahl durch den Grad der verlangten Approximation bestimmt ist. Diese Koeffizienten und damit der Parameter ω können aus der Forderung, daß die Differentialgleichungen erfüllt sein müssen, bestimmt werden. Da die numerische Auswertung für Mehrkurbelmaschinen sehr langwierig ist, da insbesondere die Zahl der letztgenannten Koeffizienten sehr groß ist, wird die numerische Rechnung an einer Einkurbelmaschine gezeigt, welche zwei bzw. mit einer weiteren Vereinfachung eine Differentialgleichung liefert. Bei Bestimmung der Werte ω bis zur 9. Ordnung findet man, daß sich die entsprechenden Werte ω der klassischen Methode in zwei Werte aufspalten. Die Größe der Aufspaltung ist jedoch sehr klein, insbesondere bei hohen Werten ω und bei kleinem Verhältnis der hin- und hergehenden Massen zu den rotierenden, so daß im Wesentlichen die klassische Methode genügend genaue Werte liefert. *W. Meyer zur Capellen.*

Grammel, R.: Ein neues Verfahren zur Berechnung der Drehschwingungszahlen von Kurbelwellen. Ing.-Arch. 2, 228–244 (1931).

Bei allen stehenden Drehschwingungen eines Systems von $n + 1$ Scheiben auf einer Welle treten genau n (reelle oder virtuelle) Knotenpunkte in der Wellenachse auf. Entsprechend der Teilung der einzelnen Wellenstücke l_k durch die betreffenden Knoten in $\lambda_k l_k$ und $(1 - \lambda_k) l_k$ werden in bekannter Weise auch die Drehmassen Θ_k in je 2 Teile $(1 - \mu_k) \Theta_k$ und $\mu_k \Theta_k$ (mit $\mu_0 = 1, \mu_n = 0$) so zerlegt, daß alle sich ergebenden Elementarsysteme gleiche Eigenfrequenz α haben. Mit $z = (2\pi\alpha)^2$ und $c_k = C_k/l_k \Theta_{k-1}$, $c'_k = C_k/l_k \Theta_k$, C_k = Drillungssteifigkeit des Wellenstückes l_k , kommt für z eine Reihe von Gleichungen

$$z = \frac{c_k}{\lambda_k \mu_{k-1}} \quad \text{und} \quad z = \frac{c'_k}{(1 - \lambda_k)(1 - \mu_k)},$$

oder durch Elimination der λ_k :

$$\mu_k = 1 - \frac{c'_k}{z - \frac{c_k}{\mu_{k-1}}} \equiv \frac{f_k(z)}{g_k(z)},$$

wo f_k und g_k ganze rationale Funktionen k -ten Grades sind. Die Frequenzgleichung, die die gesuchten Eigenwerte z_i zu Wurzeln hat, lautet $f_n(z) = 0$, was sich durch sukzessives Einsetzen der μ_k auch als Kettenbruchgleichung schreiben läßt. Für die Frequenzfunktionen f_k hat man die Rekursionsformel:

$$\left. \begin{aligned} f_k &\equiv (z - c_k - c'_k) f_{k-1} - c_k c'_{k-1} f_{k-2}, \\ f_0 &\equiv 1, \quad f_{-1} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Bei der homogenen Maschine $c_k = c'_k = c$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist mit $\zeta = z/c$ die reduzierte Frequenzfunktion $\varphi_k(\zeta) \equiv f_k/c^k$ bei geradem n symmetrisch, bei ungeradem n schiefsymmetrisch bezüglich $\zeta = 2$, so daß für ζ nur das Intervall $0 \leq \zeta \leq 4$ in Betracht kommt. Die Frequenzfunktionen φ_1 bis φ_{12} und ihre Nullstellen ζ_i sind in diesem Bereich durch Tabellen und Diagramme dargestellt. Kommt zu der homogenen Maschine noch eine Zusatzdrehmasse Θ_{n+1} , etwa ein Schwungrad, so folgt mit

$$\gamma_1 = \frac{c_{n+1}}{c}, \quad \gamma'_1 = \frac{c_{n+1}}{c}$$

aus (1):

$$\frac{f_{n+1}}{c^{n+1}} \equiv (\zeta - \gamma_1 - \gamma'_1) \varphi_n - \gamma_1 \varphi_{n-1}.$$

Die Frequenzgleichung $f_{n+1} = 0$ wird auf graphischem Wege gelöst durch die Schnitte der Kurven $y = (\zeta - \gamma_1 - \gamma'_1) \varphi_n$ und $y = \gamma_1 \varphi_{n-1}$. Das Verfahren wird erweitert

auf Maschinen, die mehrere Zusatzdrehmassen enthalten oder aus mehreren Aggregaten zusammengesetzt sind. Die Rechenarbeit bleibt dabei erträglich, wie an Hand einiger Zahlenbeispiele gezeigt wird. Schließlich werden noch einige allgemeine Sätze über die Eigenfrequenzen bewiesen.

S. Gradstein (Darmstadt).

Callandreau, Édouard: Sur les lignes de glissement d'un massif pulvérulent. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1150—1152 (1931).

L'A. espone una semplice costruzione per tracciare il profilo della superficie di rottura passante per il piede della parete di sostegno di una massa polverulenta ed individuante in questa il prisma di massima spinta, seguendo la teoria di Boussinesq dei semifluidi allo stato di equilibrio limite e nell'ipotesi che il profilo della superficie di rottura sia interamente rettilineo; l'approssimazione del nuovo metodo è superiore di quella risultante dal procedimento di Coulomb-Poncelet. Bossolasco (Turin).

Jenkin, C. F.: The pressure exerted by granular material: An application of the principles of dilatancy. Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 53—89 (1931).

Als Modell für körniges Material werden Anordnungen von Kreisscheiben verwendet die Kräfteverteilung in diesen wird graphisch ermittelt. Sie ist stark von der Packungsdichte abhängig und wie diese weitgehend unbestimmt. Man kann aber 2 Grenzen angeben, zwischen die die Konstellation der Scheiben und die Kräfteverteilung eingeschlossen ist, nämlich die „gewöhnliche“ und die durch „Gewölbebildung“ verursachte. Die Gewölbebildung wird genauer und unter verschiedenen Beanspruchungen (z. B. Ausfließen aus einer kleinen Öffnung) untersucht. Unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse wird ein Apparat zur Messung des Erddruckes auf eine senkrechte Wand konstruiert. Wesentlich ist dabei, daß die Länge der Wand groß ist gegen die Tiefe des Sandes. Durch Messungen an Sand und an Glaskugeln werden die am Modell gewonnenen Schlüsse kontrolliert und soweit sie präzisiert werden konnten, bestätigt.

Eisenschütz (Berlin).

Hoffman, O.: Proprietà meccaniche dei corpi porosi. Rend. Semin. mat. e fis. Milano 4, 117—135 (1931).

Es werden drei den porösen Körpern eigentümliche Erscheinungen untersucht: die Spannungen, die durch hydrostatische Drücke in den Poren hervorgerufen sind, Bruchrisse und elastische Deformationen. Die Spannungen werden unterschieden in die makroskopischen, die durch die Elastizitätstheorie geliefert werden, und in die mikroskopischen, die tatsächlich auftreten. Für hydrostatischen Druck p haben jene den Wert $\sigma = -n p(1 - \mu')$, wenn μ' die „spezifische Porosität“ bezeichnet. Die kubische Dilatation ist $\Theta = p(1/C - 1/C^*)$, worin C den „Modul der makroskopischen“, C^* den der „mikroskopischen Kompressibilität“ bezeichnet. Die in den Poren auftretenden Raum- und Oberflächenkräfte werden angesetzt und dadurch die Grundlagen für die Berechnung der Wirkung des hydrostatischen Druckes in porösen Bauwerken (Staumauern) gewonnen. Die Entstehung der Risse wird an Hand der bekannten und gebräuchlichen Annahmen über den Eintritt des Bruches erklärt. Für die Darstellung des elastischen Verhaltens der betrachteten Körper wird eine σ - ε -Linie gewählt, für die die zweite Ableitung $d^2\sigma/d\varepsilon^2$ in Form zweier Exponentialfunktionen nach Art der Gauss'schen Fehlerkurven verläuft.

T. Pöschl (Karlsruhe).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

● **Lamb, Horace:** Lehrbuch der Hydrodynamik. Autorisierte dtsh. Ausgabe. 2. Aufl. (Nach d. 5. engl. Aufl.) Besorgt v. Elise Helly. Mit Geleitwort u. Zusätzen v. R. von Mises. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrbüchern a. d. Geb. d. math. Wiss. Bd. 26.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. XVI, 872 S. u. 111 Abb. geb. RM. 48.—.

Die neue deutsche Ausgabe des Lambschen Lehrbuches wird zweifellos von allen Hydrodynamikern auf das lebhafteste begrüßt. Die 5. englische Auflage, die hier in einer vollständig neuen, flüssigen Übersetzung vorliegt, gibt in einer bisher unerreicht

meisterhaften Weise einen Überblick über den gesamten Stand der klassischen Hydrodynamik. Die Tatsache, daß die neuesten Ergebnisse der Forschung in der Anlage des Buches nicht organisch verarbeitet sind, tut der Bedeutung des Werkes keinen Abbruch. Vielmehr wird die in sich geschlossene Lambsche Darstellung nicht nur ein wertvolles Lehrbuch bleiben, sondern nach wie vor eine wahre Fundgrube hydrodynamischer Probleme bilden, die noch ihrer Bearbeitung mit modernen mathematischen Methoden harren. Aus dieser Erkenntnis heraus hat wohl R. v. Mises verzichtet, den Rahmen des Buches zu sprengen und hat sich mit einer Anzahl von Zusätzen begnügt, in denen er in begrüßenswerter Weise einige seiner Veröffentlichungen zusammenstellt. Da die äußere Einteilung des Buches mit derjenigen der ersten deutschen Ausgabe von 1907 weitgehend übereinstimmt, beschränke ich mich auf die Inhaltsangabe dieser Zusätze: I. Ausflußstrahlen. II. Axialsymmetrische Strömung. III. Zweidimensionale Theorie des Tragflächenauftriebs. IV. Gleitflächen in zähen Flüssigkeiten. V. Integralsätze über Druck und Arbeitsleistung einer Flüssigkeit.

A. Weinstein (Breslau).

Herrmann, W.: Über die Bedingungen für dynamische Ähnlichkeit. Z. VDI 1931 I, 611—616.

Die Voraussetzungen für die mechanische Ähnlichkeit zweier Systeme sind zwar grundsätzlich klar, doch bestehen unter den Praktikern noch Unklarheiten über den Gültigkeitsbereich der einzelnen Modellgesetze. Deshalb leitet der Verfasser die Modellgesetze von Newton, Froude, Reynolds und Cauchy ab und erläutert deren Anwendung. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen den allgemeinen Ähnlichkeitsbetrachtungen Newtons und derjenigen Form der Modellgesetze klargestellt, die direkt für die Praxis anwendbar ist.

Eisenschütz (Berlin).

Poggi, L.: Sulla variazione da apportarsi ai risultati delle esperienze eseguite al tunnel aerodinamico su di un modello alare. Aerotecnica 11, 424—445 (1931).

Um zu einer Beantwortung der im Titel der Arbeit angedeuteten Fragen zu gelangen, beschränkt sich Poggi auf ein zweidimensionales Problem, wobei er einen Flügel durch einen Punktwirbel und die Tunnelwände durch 2 parallele Geraden ersetzt und annimmt, daß die zweite Potenz der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Kanalachse an den freien Wänden als klein von der zweiten Ordnung vernachlässigt werden kann. Er untersucht zunächst den Fall eines auf einer Seite offenen, sich auf der anderen Seite ins Unendliche erstreckenden Kanals, indem er durch passende konforme Abbildungen den Kanalbereich auf die Punkte einer Halbebene abbildet. Liegt der Punktwirbel auf der Kanalachse, so ist das Strömungsfeld durch das komplexe Potential (z_2 Bild des Punktes z des Kanals)

$$W = V_0 z - \frac{\Gamma}{2i\pi} \left[\ln \frac{z_2 - p_2}{z_2 + p_2} + k \ln \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right]$$

gekennzeichnet (p_2 Bild des Punktwirbels). Geschwindigkeit in den charakteristischen Punkten und Bewegungsgröße ist sofort daraus zu ermitteln. Wenn der Punktwirbel nicht in der Kanalachse liegt, so kann man das Strömungsfeld als halbe Summe zweier Felder erhalten, deren eines durch 2 gleichsinnige zur Kanalachse symmetrische Wirbel von gleicher Intensität, deren anderes durch 2 zur Kanalachse symmetrische gegensinnige Wirbel von gleicher Intensität erzeugt wird. Die entsprechenden Potentiale sind

$$W_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \frac{z_2 - p'_2}{z_2 + p'_2} + \ln \frac{z_2 - p''_2}{z_2 + p''_2} + k_1 \ln \frac{z_2 - B_2}{z_2 + B_2} \right],$$

$$W_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \frac{z_4 - p'_4}{z_4 + p'_4} - \ln \frac{z_4 - p''_4}{z_4 + p''_4} + k_2 \ln \frac{z_4 - i}{z_4 + i} \right],$$

wo z_2 und z_4 Bilder des Punktes z sind. Für die Geschwindigkeit im Wirbelpunkte findet man näherungsweise $v_i = \Gamma(A + iB)/2q$. Für die Funktionen A und B wird Formel, Tafel und Schaubild gegeben. Unter Benützung der Größen A und B werden anschließend die gesuchten Korrekturformeln für die experimentellen Ergebnisse am aerodynamischen Tunnel angegeben. Ist der (zweidimensional zu denkende) Tunnel

beiderseits offen vorausgesetzt, so bildet man sein Inneres auf die Punkte eines neuen Bereiches durch die Transformationen

$$z_1 = e^{\frac{2\pi z}{q}}, \quad z_1 - (1 + 2b) = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$$

konform ab. Poggi untersucht nur den Fall, daß der Punktwirbel auf der Tunnelachse liegt, erhält für das Potential den Ausdruck (z_2 Bild von z , p_2 Bild des Wirbelpunktes)

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \frac{z_2 - p_2}{z_2 - b^2 p_2^{-1}} + k_1 \ln \frac{z_2 - F_2}{z_2 - b^2 F_2^{-1}} + k_2 \ln z_2 \right]$$

und ermittelt die Geschwindigkeiten in den charakteristischen Punkten, im besonderen im Wirbelpunkte genähert. Ein Vergleich mit der Formel von Prandtl und einer Untersuchung von Sasaki Tatudiro beschließt die Arbeit. *F. Knoll* (Wien).

Cisotti, U.: Sul fondamento analitico delle eccezioni al paradosso di d'Alembert, al teorema di Kutta-Joukowski e sulle azioni dinamiche sopra profili cuspidati. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. 13, 161—162 (1931).

In einer kurzen Notiz stellt der Verf. fest, daß die unter dem gleichen Titel erschienenen Arbeiten von L. Poggi und E. Pistolesi die Formel des Semiresiduums nicht in dem von ihm u. a. angewandten Sinne gebrauchen. Hieraus erklärt er die widersprechenden Resultate.

I. I. Sommer (München).

Lindner, F. V.: Kielwasserströmungen um eine Platte. *Ing.-Arch.* 2, 169—177 (1931).

Der Verf. zeigt, wie man durch einfache Überlagerung der Strömung einer Quellstrecke, der Potentialströmung um eine Platte und einer Rückströmung Kielwasserströmungen um eine Platte erhalten kann. Es wird abgeleitet, daß das Potential einer durch zwei parallele, gegensinnige Wirbelhalbstrecken erzeugten Strömung im Außengebiet gleich ist dem Potential einer gleichmäßig mit Quellen belegten Strecke, welche die Anfangspunkte der Wirbelhalbstrecken verbindet. Im Innengebiet jedoch unterscheidet es sich von diesem um das Potential einer Parallelströmung. Durch Übertragung der Ergebnisse auf eine schräge Platte wird versucht, die beiden experimentell bekannten Strömungsarten der anliegenden und abgerissenen Strömung zu erhalten.

H. Schlichting (Göttingen).

Betz, A., und E. Petersohn: Anwendung der Theorie der freien Strahlen. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.*) *Ing.-Arch.* 2, 190—211 (1931).

Die Verff. haben sich die Aufgabe gestellt, für die Strömung in Parallelgittern die Widerstandsbeiwerte auf Grund der Theorie der freien Strahlen auszurechnen und an Hand des Experiments festzustellen, wie weit die in diesen Fällen zu erwartende Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung besteht. Das mathematische Hilfsmittel bildet die Theorie der freien Strahlen in einer von Prandtl modifizierten Form, die sich von der klassischen Fassung durch eine größere Anschaulichkeit unterscheidet. Die Methode wird an dem Beispiel des von R. v. Mises [*Z. Ver. d. Ing.* 61, 447 (1917)] behandelten flachen senkrecht angeströmten Gitters ausführlich erläutert. Sodann werden für das aus schrägen ebenen Platten bestehende Gitter a) bei senkrechter, b) bei schräger Anströmung die Widerstandsbeiwerte explizit ausgerechnet.

Die zur Prüfung der Theorie dienenden Versuche wurden in Wasser und Luft vorgenommen. Experimentelle Schwierigkeiten, die sich durch mangelnde Stabilität der Strahlen ergaben, konnten durch besondere Maßnahmen beseitigt werden. Die meisten Versuche, insbesondere der Ausfluß von Wasser in Luft zeigten in weiten Grenzen eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Merkliche Abweichungen bestanden bei den Versuchen in Luft. Diese Abweichungen sind durch Mischungsvorgänge zwischen Strahl und Totwasser bedingt.

E. Weinle (Göttingen).

Körner, K.: Geschwindigkeitsverteilung und Druckgefälle bei Strömung im zylindrischen Rohr. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* 1, 234—238 (1931).

Troller, Th.: Zur Berechnung von Schraubenventilatoren. *Abh. aerodynam. Inst. Aachen H. 10*, 43—47 (1931).

Bei Vernachlässigung von Spaltverlusten und Reibungsverlusten ist Konstanz der Zirkulation längs des Halbmessers Bedingung für den besten Wirkungsgrad. Der Verlauf

der Flügeltiefe längs des Halbmessers ergibt sich aus der Forderung, daß diese Bedingung auch bei mäßigen Änderungen des Betriebszustandes erfüllt bleibt. *Helmbold* (Göttingen).

Wieselsberger, C.: Die Wirkung einer Luftschraube auf eine Wand. Abh. aerodynam. Inst. Aachen H. 10, 48—51 (1931).

Es wird die durch eine Wand begrenzte Strömung um eine Luftschraube mit unendlicher Flügelzahl in Fahrt in erster Näherung angegeben; daraus wird die Druckverteilung längs der Wand berechnet. *K. Friedrichs* (Braunschweig).

Glauert, H.: Aircscrews for high speed aeroplanes. Rep. aeronaut. Res. Comm. Nr 1342, 1—18 (1931).

Die Umfangsgeschwindigkeit $U = \pi n D$ der Luftschrauben ist nach obenhin dadurch begrenzt, daß bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit c erhebliche Leistungsverluste eintreten. Andererseits nehmen die Fluggeschwindigkeiten v der Rennflugzeuge noch dauernd zu, so daß man zu immer höheren Werten des Fortschrittsgrades $\lambda = v/U$ gelangt. Bemißt man die Luftschraube so, daß sie die Spitzenleistung N des Flugmotors bei der Spitzendrehzahl n und beim Höchstwirkungsgrad η aufnimmt, so ergeben sowohl die Modellversuche wie die numerische Auswertung der Theorie, daß die Steigung H ziemlich genau proportional v/n ist. Man kommt also zu bisher unerreicht hohen Werten des Steigungsgrades $h = H/\pi D$, für die auch noch keine Modellversuche vorliegen. Die Flügel derartiger Luftschrauben arbeiten am Stand ($v = 0$) bei so großen Anstellwinkeln, daß die Strömung abreißt und daß mit zur Flügelfläche annähernd senkrechter Luftkrafttrichtung gerechnet werden muß. Dann ist aber der Standschub $S = N/nH \sim N/v$ und das heißt: der Standschub, von dem Länge und Dauer des Abfluges wesentlich abhängen, ist, da das Motordrehmoment $M = N/2\pi n$ annähernd konstant ist, durch die Bedingungen des Geschwindigkeitsfluges fest gegeben und nur noch durch Verwendung von Verstellluftschrauben verbesserungsfähig. Die Wahl einer nicht verstellbaren Luftschraube erfolgt deshalb ausschließlich nach dem Gesichtspunkt möglichst guten Wirkungsgrades im Geschwindigkeitsflug; dieser läßt sich durch Wahl geeigneter Werte für Drehzahluntersetzung und Flügelzahl auch für die kommende Entwicklung noch über 80% halten, ohne daß die Umfangsgeschwindigkeiten über $U = 0,8 c$ hinaus gesteigert werden mußten.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Betz, A.: Einfluß der Kavitation auf die Leistung von Schiffsschrauben. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 411—416 (1931).

Poncein, Henri: Sur les cavitations de forme permanente. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1197—1198 (1931).

Die Note handelt von dem zweidimensionalen Problem einer Blase in einem zylindrischen Gefäß, das bis auf die Blase mit einer idealen Flüssigkeit gefüllt ist und so bewegt werden soll, daß die Blase relativ zum Gefäß in Ruhe ist und ihre Gestalt nicht ändert. Das Geschwindigkeitsfeld in der Flüssigkeit, bezogen auf gefäßfeste Koordinaten, ist stationär, wenn man den Geschwindigkeitsbetrag in jedem Augenblick durch die Winkelgeschwindigkeit der Gefäßdrehung im Raume dividiert. Um die Beziehungen zwischen Blasenform und Gefäßform bei verschiedenen Bewegungen des Gefäßes zu untersuchen, wird die konforme Abbildung der Flüssigkeit auf eine Halbebene mit dem Blasenrand auf der reellen Achse benutzt. Es ergeben sich drei Möglichkeiten: Für eine gewisse Klasse von Blasenurmissen und dazu passenden Gefäßwänden ist die Bewegung nur geometrisch eingeschränkt, der zeitliche Verlauf ist gleichgültig. Bei geradliniger Blasenbegrenzung und passenden Wänden besteht außer der geometrischen Einschränkung noch die kinematische auf gleichmäßige oder der Zeit umgekehrt proportionale Rotation. Bei beliebiger Blasenform und passenden Wänden ist die kinematische Beschränkung wie im zweiten Fall, geometrisch ist die Bewegung des Gefäßes durch die Abrollung eines Kreises oder einer logarithmischen Spirale auf einer Geraden gegeben.

A. Busemann (Dresden).

Koning, C.: Tragflächentheorie. Physica (Eindhoven) 11, 73—82 (1931) [Holländisch].

Hopf, L., und S. del Proposto: Flugtypen beim Überziehen. Abh. aerodynam. Inst. Aachen H. 10, 14—21 (1931).

Es wurde ein sehr verschiedenes Verhalten verschiedener Flugzeuge beobachtet, wenn man das Höhensteuer so stark anzieht, als dies möglich ist; und diese Verschiedenheit ist insbesondere deshalb von Interesse, weil die schwersten Gefahrenzustände für das Flugzeug

eng damit zusammenhängen. Verf. behandeln darum als Anfangszustand einer nichtstationären Flugbewegung den Fall, daß das Flugzeug mit größtem Höhenruderausschlag, aber ohne Quer- und Seitenruderausschlag horizontal fliege und daß durch eine Störung eine Drehung um die Rumpfachse eingeleitet sei. Dieser Drehung wirkt bei Anstellwinkeln über dem zu $c_{a\max}$ (= maximaler Auftriebsbeiwert) gehörigen keine Rolldämpfung entgegen, vielmehr wird diese bis zur Autorotation angefacht. In Verfolgung der so eingeleiteten Bewegung treten die verschiedenen Wirkungen in Erscheinung, welche den Typus der Bewegung bestimmen und es ergibt sich gleichzeitig, welche konstruktiven Maßnahmen zu treffen sind, die für einen bestimmten Typus förderlich oder abträglich sind. Da jedoch die Kenntnisse von den Luftkräften in dem betrachteten Gebiet noch zu unvollkommen sind, lassen sich alle erwünschten numerischen Folgerungen nicht ziehen und daher auch nicht im Einzelfall voraussagen, welchen Bewegungstypus ein bestimmtes Flugzeug bevorzugen wird.

Sext (Wien).

Diehl, Walter S.: Some approximate equations for the standard atmosphere. Rep. nat. advis. Comm. Aeronaut Nr 376, 3—12 (1931).

This report contains the derivation of a series of simple approximate equations for density ratios ρ/ρ_0 , ρ_0/ρ , $\sqrt{\rho_0/\rho}$ and for the pressure ratio p/p_0 , in the standard atmosphere. The accuracy of the various equations is discussed and the limits of applications are given. Several of these equations are in excellent agreement with the standard values. Auszug.

Nikuradse, J.: Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung von turbulenten Wasserströmungen in glatten und rauen Rohren. (Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.) (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 239—248 (1931).

Goldstein, S.: The forces on a solid body moving through viscous fluid. Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 198—208 (1931).

Diese Arbeit präzisiert die Ableitung einer Widerstandsformel, welche der Verf. in einer früheren Note [Proc. roy. Soc. Lond. A 123, 216—225 (1929)] angegeben hat. Befindet sich ein Körper in einer zähen Flüssigkeit, die für $x = -\infty$ die konstante Geschwindigkeit U besitzt, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen, wenn man nach Oseen die Geschwindigkeitskomponenten gleich $U + u_1, u_2, u_3$ setzt,

$$U \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

(ρ = Dichte, ν = kinematische Zähigkeit). Da $\Delta p = 0$ ist, werden die Gleichungen durch den Ansatz

$$p = -\rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad (\Delta \varphi = 0)$$

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + w_i, \quad \left(\Delta - \frac{U}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) w_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0$$

integriert. φ ist nur bis auf eine additive harmonische Funktion von x_2, x_3 bestimmt. Verf. bestimmt φ , indem er die Hypothese macht, daß $\partial \varphi / \partial x_i$ stetig ist, außer für $x_1 > 0$ und $x_2 = 0, x_3 = 0$, ferner im Unendlichen nach 0 strebt, außer für $x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, und leitet die Widerstandsformel in Übereinstimmung mit seinen früheren Resultaten ab.

Weinstein (Breslau).

Mercier, Pierre: Contribution à l'étude des frottements visqueux; étude de μ . J. Phys. et Radium, VII. s. 2, 114—132 (1931).

Der Verf. betrachtet Gleitflächen (Unstetigkeitsflächen) in einer zähen Flüssigkeit bei stationärer Bewegung und zeigt, daß man in gewissen Fällen hier die gleichen Formeln erhält wie in der klassischen Theorie der zähen Flüssigkeiten (z. B. Poiseuillesche Formel für die Ausflußgeschwindigkeit aus einem Rohr).

Für eine experimentelle Bestimmung des Zähigkeitskoeffizienten μ in einem sehr großen Bereich von Werten für das Geschwindigkeitsgefälle wird eine bekannte Versuchsanordnung mit zwei konzentrischen Zylindern angegeben, zwischen denen sich die Flüssigkeit befindet.

Durch Messung des Momentes, das bei Rotation des äußeren Zylinders durch die Flüssigkeit auf den inneren ruhenden Zylinder übertragen wird, wurde μ bis zu den hohen Werten des Geschwindigkeitsgradienten von mehreren Metersekunden pro Millimeter als konstant gefunden.

H. Schlichting (Göttingen).

Banerji Sudhansu, Kumar, and Raghunath Vinayak Barave: On Oberbeck's vortices. (*Colaba Observ., Bombay.*) *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 1057—1081 (1931).

Es wird die Struktur der Wirbel untersucht, die entstehen, wenn man nach der Methode von Oberbeck eine kleine Menge gefärbter Flüssigkeit in eine andere ruhende Flüssigkeit einspritzt. Die zeitliche Ausbildung dieser Wirbel wurde kinematographisch festgehalten. Ein Querschnitt in Richtung der Fortbewegung des Wirbelgebildes zeigt, daß die Stromlinien die Form von 2 Spiralen haben, deren Windungszahlen mit der Zeit zunehmen (Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche). Die Abhängigkeit des Wirbelgebildes von verschiedenen experimentellen Einzelheiten, wie Menge der Farbflüssigkeit, Durchmesser des zum Einführen benutzten Röhrchens usw., wird untersucht. Für die theoretische Behandlung wird das Problem als zweidimensional angenommen, und durch Modifikation der Helmholtz'schen Lösung für den Ausfluß eines Strahles wird ein Resultat erhalten, das mit den experimentellen Ergebnissen wenigstens qualitativ übereinstimmt.

H. Schlichting (Göttingen).

Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.

Strecker: Beschlüsse der internationalen elektrotechnischen Kommission (IEC) über Größen und Einheiten. *Ann. Physik*, V. F. 8, 1—6 (1931).

Sommer, J. J.: Beiträge zur Stabilität elektrischer Stromkreise insbesondere von Wechselstromkreisen. *Ann. Physik*, V. F. 9, 419—457 (1931).

Verf. untersucht die Stabilität elektrischer Wechselstromkreise mit nichtlinearem Widerstand (Lichtbogen, Eisenspule). Wie bekannt stößt man hier auf Schwierigkeiten, da die Koeffizienten der Störungsgleichungen periodische Funktionen der Zeit mit der Frequenz 2ω sind. Verf. stellt einerseits eine energetische Methode auf, die nur mit Effektivwerten zu tun hat, andererseits legt er eine Störungsmethode zugrunde, die von Lord Rayleigh herrührt und darin besteht, daß man für die Lösung der Störungsgleichungen den Ansatz $Ce^{\alpha t} \sin(\omega t - \varphi)$ macht und dann unter Vernachlässigung der Oberschwingungen eine charakteristische Gleichung für die Exponenten α aufstellt. (Es sei bemerkt, daß diese Methode nur dann berechtigt ist, falls die Modulationsamplituden in den betrachteten Störungsgleichungen genügend klein sind; für größere Modulationsamplituden kommen neue Labilitätsgebiete hinzu. Referenten.) Weiter wird gezeigt, wie man ein und dieselben Stabilitätsbedingungen auf verschiedene Systeme übertragen kann. Endlich wird die „Labilität der Momentanwerte“ untersucht. Darunter versteht der Autor gewisse Auslöschungen und Unstetigkeiten, die innerhalb einer jeden Periode stattfinden.

A. Andronow und A. Witt (Moskau).

Zobel, Otto J.: Extensions to the theory and design of electric wave-filters. *Bell. Syst. techn. J.* 10, 284—341 (1931).

Wenn man unter einem idealen Siebfilter ein solches versteht, dessen Dämpfung in den Durchlaßbereichen Null, in den Sperrbereichen unendlich ist und dessen Wellenwiderstände in den Durchlaßbereichen reell und konstant, in den Sperrbereichen imaginär sind, so sind die praktisch gebauten Siebketten von diesem Ideal mehr oder weniger weit entfernt. Zobel entwickelt, auf seinen früheren Arbeiten fußend, die Theorie und den Entwurf von hierin verbesserten Ketten. Es handelt sich dabei um „zusammengesetzte“ Ketten, deren einzelne Maschen verschieden sind, aber gleiche Sperr- und Durchlaßbereiche sowie an den einzelnen Zusammenschlüssen je gleiche Wellenwiderstände haben, so daß keine Reflexionsverluste entstehen. Um so schließlich zu Endmaschen einer Kette zu gelangen, deren äußerer Wellenwiderstand in den Durchlaßbereichen genügend frequenzunabhängig ist, verwendet Zobel ein Rekursionsverfahren: Ausgehend von Gliedern mit reziproken Reaktanzen, deren Eigenschaften

bekannt sind, gewinnt er aus diesen durch ein einfaches Umbildungsverfahren Glieder von einem um eins höheren Freiheitsgrad, die mit ihnen bezüglich der Grenzfrequenzen und des einen Wellenwiderstandes übereinstimmen; von den so gewonnenen können nach dem gleichen Verfahren wieder neue deriviert werden usw. Nach n Schritten enthält der nicht gleich gemachte Wellenwiderstand des letzten Gliedes n willkürliche Parameter, die so gewählt werden können, daß derselbe mit beliebiger Näherung frequenzunabhängig wird; in praxi genügen hierzu 2 Schritte. Man erhält so einen unsymmetrischen Vierpol, dessen einer Wellenwiderstand dem einer Kette mit reziproken Reaktanzen gleich ist, während der andere in den Durchlaßbereichen nahezu konstant ist, einen Abschlußvierpol also, der die Kette auf einen Ohmschen Widerstand „umbildet“; die Einzelimpedanzen dieses Vierpols lassen sich nach optimaler Wahl der beiden Parameter unmittelbar als Funktionen der Kettenreaktanz angeben. In dieser Weise zusammengesetzte Ketten haben auch einen gleichmäßigeren Dämpfungsverlauf in den Sperrgebieten als die einfachen, da die Unendlichkeitsstellen des Fortpflanzungsmaßes für jedes Glied bei anderen Frequenzen liegen. Für die Siebketten der unteren Klasse bis zum Tief-Band-Hochpaßfilter einschließlich wird dieser Umbildungsvierpol zahlenmäßig angegeben, gleichzeitig in Ergänzung früherer Entwurfskarten eine graphische Darstellung der restlichen Übertragungsverluste bei Anschluß des neuen Abschlußvierpols an Ohmschen Widerstand. — Im Zusammenhang hiermit wird ein Satz über Reaktanzen sowie die Lage der charakteristischen Frequenzen der behandelten Siebketten aus dem allgemeinen Reaktanztheorem hergeleitet.

Baerwald (Berlin).

Baerwald, Hans Georg: Über die Fortpflanzung von Signalen in dispergierenden Systemen. III. Tl.: Diskontinuierliche Systeme (symmetrische Vierpolketten) und gemischte Systeme. (*Heinrich Hertz-Inst. f. Schwingungsforsch., Berlin.*) Ann. Physik, V. F. 8, 565—614 (1931).

Als mathematischer Ausdruck einer „Signalfortpflanzung“ wird ein über einen unendlichen komplexen Weg der ω -Ebene geführtes Integral $f(t, n) = \int F(\omega) e^{i(\omega t - kn)} d\omega$ angegeben, das mit der Methode der Sattelpunkte und einer Ergänzung derselben (I. § 11) analog L. Brillouin, Ann. Physik, IV. F. 44, 203 (1914) diskutiert wird. Die „dispergierenden Systeme“ sind Ketten mit vielen (n) Gliedern, wobei das einzelne Glied einen symmetrischen Vierpol darstellt, der im Hauptteil der Arbeit aus einer endlichen Zahl von Induktivitäten und Kapazitäten besteht. Die Abhängigkeit des f vom „Fortpflanzungsmaß“ $k(\omega)$ (durch den Faktor i unterschieden von der üblichen Definition) wird untersucht und deshalb $k(\omega)$ näher betrachtet. Es ist $\cos k = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2}$, wobei Z_1 und Z_2 die beiden Wechselstromwiderstände eines „Kreuzgliedes“ oder Frequenzcharakteristiken eines symmetrischen Vierpols sind [Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. 33, (1927)]. Z_1 und Z_2 sind für reelle $\lambda = i\omega$ reelle, für rein imaginäre λ rein imaginäre Funktionen, die in der rechten λ -Halbebene mit positiv reellem Teil regulär sind. Aus diesen bekannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden eine Reihe (nicht hinreichender) Sätze über Z_1/Z_2 und somit k abgeleitet. Z. B. ist $dk/d\omega$ in „Durchlaßgebieten“ positiv. Der implizit in F auftretende Einfluß des „Wellenwiderstandes“ $1/Z_1 \overline{Z_2}$ auf f wird nicht untersucht.

Cauer (Cambridge, Mass.).

Bayly, B. de F.: Selectivity, a simplified mathematical treatment. (*Dep. of Electr. Eng., Univ., Toronto.*) Proc. Inst. Radioeng. 19, 873—881 (1931).

Der Frequenzverlauf des Betragsverhältnisses von Ein- und Ausgangsspannung wird für verschiedene, in der drahtlosen Empfangstechnik gebräuchliche, abgestimmte Anordnungen von Verstärkerkreisen näherungsweise auf einfache Resonanzkurven zurückgeführt. Diese werden mit Benutzung eines Parameters in logarithmischem Maß tabuliert. Das Verfahren liefert eine einfache Übersicht über die Selektivitätseigenschaften (Bandbreite) solcher Kreise.

Baerwald (Berlin).

Kiebitz, F.: Über die Maßeinheiten der Strahlung. *Z. Hochfrequenztechn.* **37**, 136—139 (1931).

Maße für die Wellenausstrahlung der Antennen und die Wellenausbreitung werden besprochen. *Cauer* (Cambridge, Mass.).

Fischer, F. A.: Theorie des Lautstärkenabgleiches und der günstigsten Empfängeranpassung bei Verzögerungsketten. (*Labor. d. Elektroakustik G. m. b. H., Kiel.*) *Z. techn. Physik* **12**, 292—298 (1931).

Liegen mehrere Mikrophonempfänger an einer Verzögerungskette, so wird die von einem solchen gelieferte elektrische Energie je nach seiner Entfernung vom Ende der Kette infolge der Dämpfung der Kette und der Reflexion an den Anschlußstellen der anderen Empfänger mehr oder weniger geschwächt. Damit alle Empfänger in dem am Ende der Kette liegenden Telefon den gleichen Strom erzeugen, werden sie nicht direkt, sondern unter Zwischenschaltung von Abgleichwiderständen an die Kette gelegt. Für diese wird unter gewissen Näherungsannahmen eine Rekursionsformel abgeleitet. *Baerwald* (Berlin).

Weyrich, Rudolf: Bemerkungen zu den Arbeiten „Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche“ und „Über das Strahlungsfeld einer endlichen Antenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen.“ (*Math. Inst., Dtsch. Techn. Hochsch., Brünn.*) *Ann. Physik*, V. F. **9**, 513—518 (1931).

Joos, Georg: Zur Frage nach der Natur der Langzeitechos. (*Theor.-Phys. Semin., Univ. Jena.*) *Z. Hochfrequenztechn.* **37**, 136 (1931).

Aus der van der Polschen Hypothese einer starken Herabsetzung der Gruppengeschwindigkeit (Gr.) in der Heavisideschicht wird eine große Dispersion der Gr. und daraus weiter gefolgert, daß ein Echo modulierter Wellen nicht wahrnehmbar ist.

Cauer (Cambridge, Mass.).

Heisenberg, W.: Zur Theorie der Magnetostriktion und der Magnetisierungskurve. *Z. Physik* **69**, 287—297 (1931).

Unter der Annahme, daß in einem ferromagnetischen Einkristall spontan magnetisierte Elementargebiete vorkommen, wird die Richtungsabhängigkeit der Magnetisierung in Co-Einkristallen und die Magnetostriktion von Fe-Einkristallen diskutiert. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die Elementargebiete alle gleich groß sind und bei gegebener Größe und Richtung der Gesamtmagnetisierung ihre wahrscheinlichste Verteilung über die verschiedenen Orientierungen bestimmt. Da die Magnetostriktion homogen magnetisierter Gebiete bekannt ist, läßt sich daraus dann unmittelbar die Magnetostriktion eines makroskopischen, aus vielen homogen magnetisierten Gebieten bestehenden Fe-Kristalls berechnen und ergibt sich in guter Übereinstimmung mit den Messungen von Webster. Schließlich wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Elementargebiete mit den durch Verzerrungen innerhalb des Kristalls hervorgerufenen Remanenz- und Hysteresiserscheinungen in Zusammenhang zu bringen.

Block (Leipzig).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Hermann, R.: Die Beziehungen zwischen dem absoluten und dem wärmetechnischen Maßsystem. (*Abt. f. Angew. Mechanik u. Thermodyn., Phys. Inst., Univ. Leipzig.*) *Z. techn. Phys.* **12**, 213—218 (1931).

Zur Erleichterung der Umrechnungen häufig vorkommender Größen vom Absoluten (C-G-S) ins „Wärmetechnische“ (Meter, Kilogrammgewicht, Stunde) System und umgekehrt wird eine Zusammenstellung der hierbei auftretenden Dimensionen und Umrechnungsfaktoren gegeben. Eine Übersicht über die in einigen dimensionslosen Kennzahlen der Wärmeübertragung auftretenden Kombinationen von dimensionierten Größen wird angefügt. *Autoreferat.*

● **Blasius, Heinrich:** Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Hamburg: Boysen & Maasch 1931. VIII, 232 S. RM. 6.—.

Das Buch wendet sich in erster Linie an die Studierenden technischer Mittelschulen, kann aber auch von Universitäts- und Hochschulstudenten und Ingenieuren sicherlich mit Nutzen

verwendet werden. Die Darstellung ist so gewählt, daß sie den Bedürfnissen der Praxis und der theoretischen Begründung in gleicher Weise entgegenkommt. Alle physikalischen Begriffe werden daher aus grundlegenden, einfachen Meßexperimenten gewonnen und die Gesetze, die diese so gewonnenen Größen verknüpfen, aus dem zahlenmäßigen Ausfall dieser Experimente abgeleitet. Die allgemeinen thermodynamischen Sätze werden nicht, wie in den meisten Darstellungen üblich ist, an die Spitze gestellt und aus ihnen deduktiv geschlossen, sondern umgekehrt, dem historischen Entwicklungsgange der Thermodynamik folgend, die allgemeinen Sätze erst zum Schlusse auseinander gesetzt, nachdem der Leser bereits eine genügende Summe von Erfahrungskennntnissen gesammelt hat. Von mathematischen Hilfsmitteln werden im allgemeinen nur die dem Anfänger geläufigen elementaren benützt und nur hier und da, wo es sich als unbedingt nötig erweist, die Infinitesimalrechnung herangezogen. Das im Vorwort vom Verf. ausgesprochene Mißtrauen gegen die Stichhaltigkeit mathematischer Deduktionen scheint allerdings wenig begründet. Das Buch zerfällt in 12 Abschnitte: Ausdehnung fester und flüssiger Körper; Ausdehnung der Gase; Molekulartheorie; Wärmemengen; Arbeit und Wärme bei den Zustandsänderungen idealer Gase; Energie und Energiestrom bei idealen Gasen; Dämpfe; Energie und Energiestrom bei Dämpfen; Ausnutzbarkeit der Wärme; Weitere Berechnungen auf Grund des Entropiebegriffes; Gemische und Verbrennungsvorgänge; Gemische, Lösungen und Verbindungen unter dem Gesichtspunkt der beiden Hauptsätze. Jeder Abschnitt enthält zahlreiche Beispiele und Aufgaben aus allen möglichen technischen Gebieten, die mit großem Geschick ausgewählt sind; überall ist auch die numerische Durchrechnung aufgenommen. Um dem Leser die Schwierigkeiten der Benützung verschiedener Maßeinheiten möglichst aus dem Wege zu räumen, ist durchweg, auch in den Formeln neben dem Zahlen- oder Buchstabenwert jeder Größe, auch ihre Benennung eingeführt, wobei allerdings öfters ungewohnte Benennungssymbole verwendet werden. Fürth (Prag).

Bursian, V., und V. Sorokin: Anwendung der Diffusionsgleichung auf die Theorie der Kettenreaktionen. (*Abt. f. Theor. Phys. u. f. Phys. Chem., Phys.-Techn. Inst., Leningrad.*) Z. physik. Chem. B 12, 247—267 (1931).

Es wird von der Vorstellung ausgegangen, daß bei Ablauf einer Reaktionskette der bei jedem wirksamen Zusammenstoß von Molekül zu Molekül überspringende „Reaktionspunkt“ eine Molekularbewegung im Gas ausführt, die sich in nichts von der Bewegung der wirklichen Moleküle unterscheidet. Auf die Ausbreitung dieser Reaktionspunkte im Gasraum wird sodann die Diffusionsgleichung angewandt. Hierbei wird die Erzeugung neuer Ketten durch Anregung von außen und Verzweigung der Ketten, sowie das Abbrechen bestehender Ketten an den Gefäßwänden berücksichtigt. Für bestimmte Gefäßformen werden so Gleichungen für die Reaktionsgeschwindigkeit und die Bedingungen für das Eintreten einer Explosion abgeleitet. H. Ulich.

Mimura, Yosataka: On the equations of motion in thermodynamics. J. Sci. Hiroshima Univ. A 1, 117—123 (1931).

A principle analogous to Hamilton's principle in dynamics is proposed for the study of quasistatic processes in a thermodynamic system. Let $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t)$ be a function of the n parameters x_1, x_2, \dots, x_n which represent the state of the system; of $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ their rates of change; and of the time t . The proposed principle states that the actual change of a conservative thermodynamical system takes place

in such a way as to make the value of $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ an extremum. The initial and final states

are supposed to be given and the time is supposed to have fixed terminal values. Equations of motion result that are identical in form with the Lagrangian equations of dynamics. The form of the function L is to be found by trial. It is finally taken to have

the form $L = S(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_1^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \dot{x}_i$. The function S is identified

with the entropy of the system by considering a system in equilibrium. It also follows from the equations of motion that $dS/dt = 0$. Although the coefficients A_i are not determined, the adiabatic law for a perfect gas, $pv^\gamma = \text{const.}$, is derived from the equations of motion using the parameters p and v . To avoid certain contradictions with known results the proposed principle is finally modified by supposing that the final state of the system is not given. The terminal conditions are imposed that the coefficients A_i vanish for $t = t_2$ and that the parameters x_1, x_2, \dots, x_n for the final

state correspond to a point on the surface $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$ The author states that the unknown functions A_i are in part determined by these restrictions.

H. W. March (Madison, Wisconsin).

Brillouin, L.: *Élasticité, agitation thermique et fusion des corps solides.* C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 668—669 (1931).

Dans un cristal cubique, l'hypothèse des forces centrales conduit à l'égalité des deux coefficients de Lamé λ et μ , tandis qu'on a en général $\lambda > \mu$. L'explication suivante de ce paradoxe est proposée. — L'auteur écrit l'expression de la densité d'énergie potentielle pour une dilatation uniforme suivie d'une petite déformation arbitraire. Puis il admet que la dilatation est due à la pression p' des ondes d'agitation thermique, et il ajoute à la densité d'énergie un terme complémentaire $p' \delta v/v$ qui correspond au travail $p' \delta v$ effectué par la pression p' (v volume, $\delta v/v$ dilatation cubique). Dans la formule qui résulte, la pression p' s'élimine; la formule est tout à fait semblable à celle qui a servi de point de départ, mais les coefficients λ et μ y sont remplacés par

$$\lambda_1 \approx \lambda + p'; \quad \mu_1 \approx \mu - p'.$$

Si même on a $\lambda = \mu$, on aura $\lambda_1 > \mu_1$, ce qui explique le paradoxe. Le coefficient μ_1 peut diminuer jusqu'à s'annuler; c'est alors la fusion du corps solide.

V. Fock (Leningrad).

Hausen, H.: *Näherungsverfahren zur Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren.* Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 105—114 (1931).

Die Arbeit enthält 2 Methoden zur angenäherten Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = t - \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \vartheta - t,$$

der die Temperaturen ϑ eines Gases und t einer von dem Gas durchströmten Wärmespeichermasse unter gewissen vereinfachenden Annahmen genügen; dabei bedeutet ξ die („reduzierte“) Länge der Speichermasse und η die („reduzierte“) Zeit. Als Grenzbedingungen werden angenommen: Zu einer Zeit η_0 sei $t(\xi, \eta_0)$ gegeben, an einem Punkt ξ_0 (Anfang der Speichermasse) $\vartheta(\xi_0, \eta) = 0$. Das erste — graphische — (Extrapolations-)Verfahren wird aus den Differentialgleichungen durch Übergang von den Differentialen zu endlichen Differenzen erhalten. Beim zweiten — rechnerischen — Verfahren, vom Verf. Wärmepolmethode genannt, wird in Anlehnung an andere mit einer Einflußfunktion arbeitenden Methoden zunächst die Temperaturverteilung im Speicher angenähert bestimmt, die sich zu einer Zeit η einstellt, wenn zur Zeit $\eta = 0$ nur ein gewisses Stück der Länge $\Delta \xi$ des Speichers die Temperatur 1 besitzt und überall sonst die Temperatur 0 herrscht. Den Speicher zerlegt man dabei in lauter Stücke der Länge $\Delta \xi$ und betrachtet nur die mittlere Temperatur in jedem solchen Element. Durch Superposition erhält man dann die Temperaturverteilung im Speicher zur Zeit η bei beliebiger Anfangsverteilung und daraus leicht, etwa auf graphischem Wege, die Temperaturverteilung im Gase. — Besonders das rechnerische Verfahren läßt sich nun leicht auf in periodischem Beharrungszustand arbeitende Generatoren anwenden, indem man die bisher als bekannt vorausgesetzte Anfangstemperatur der Speichermasse an jeder Stelle erst aus den „Umschaltbedingungen“ rechnet, was bei Unterteilung der Speicherlänge in N Teile die Auflösung von N Gleichungen mit N Unbekannten erfordert. Bei Zahlenrechnungen empfiehlt der Verf. eine Kombination des rechnerischen und zeichnerischen Verfahrens.

R. Iglisch (Aachen).

Lichtenecker, Karl, und Karl Rother: *Die Herleitung des logarithmischen Mischungsgesetzes aus allgemeinen Prinzipien der stationären Strömung.* Physik. Z. **32**, 255—260 (1931).

Aus vier Postulaten, die zum Teil direkt aus der Definition des strukturlosen Mischkörpers und der Theorie der stationären Strömung folgen, werden die Gesetze abgeleitet, die für die Berechnung der Eigenschaften eines Mischkörpers aus den Eigen-

schaften seiner Komponenten gelten. Es ergibt sich neben einem Potenzgesetz das von Lichtenecker aufgestellte logarithmische Mischungsgesetz. Der Zusammenhang der neuen Ableitung dieses Gesetzes mit früheren wird diskutiert.

K. Bechert (München).

Milne, E. A.: Notes on thermodynamics. I. Osmotic pressure and stability. II. Effect of total pressure on osmotic pressure. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 55—58 (1931).

I. The author considers a solution at pressure p' in contact across a semi-permeable membrane with the pure solvent at pressure p , and studies the equilibrium by means of Gibbs potentials. Gibbs showed that for stability the partial potential of the solute must increase with its partial density. The author deduces that the osmotic pressure P must be positive for stability. II. He examines similarly the effect of increasing p' and p in such a way that equilibrium is maintained. The osmotic pressure is shown to be related to the total pressure, when the masses of solute, solution and pure solvent are kept constant, by the equation $dP/dp' = 1 - \varrho(p)u(p')$, where $\varrho(p)$ is the density of the pure solvent and $u(p')$ is measured by the increase in volume produced by adding unit mass of solute to a large volume of the solution at its given pressure and concentration.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Lerberghe, G. van: Calcul des affinités physico-chimiques. (Ecole des Mines et de Métallurgie, Mons, Belg.) Mémorial Sci. phys. H. 15, 1—74 (1931).

Die Monographie stellt sich die Aufgabe, die Beziehungen der in geeigneter Weise gemessenen chemischen Affinität zu anderen physikalisch-chemischen Größen in möglichster Vollständigkeit herzuleiten, die dann dazu verwendet werden können, um die Affinitäten aus Messungen an entsprechenden Reaktionen berechnen zu können. Zunächst werden die aus einer oder mehreren Phasen bestehenden physikalisch-chemischen Systeme definiert und ihre Umwandlungen, die in rein physikalische und in physikalisch-chemische, nämlich Änderungen der Phase und chemische Reaktionen, eingeteilt werden. Zur Messung des Ablaufes einer chemischen Reaktion werden die von Donder eingeführten „chemischen Variablen“ ξ als besonders zweckmäßig übernommen und den Variablen: Temperatur, Druck und Volumen an die Seite gestellt. Nach einer kurzen Übersicht über die wichtigsten thermodynamischen Formeln wird als „Affinität“ eines Systems nach Donder die Größe

$$\mathfrak{A} = \frac{TdS - dQ}{d\xi}$$

eingeführt; sie genügt stets der Beziehung $\mathfrak{A}d\xi \geq 0$, worin das Gleichheitszeichen nur für den Fall des chemischen Gleichgewichtes gilt. Es folgt zunächst die Berechnung der Affinität eines idealen Gases. Es zeigt sich, daß ihr Verschwinden die Gültigkeit der bekannten Guldberg-Waageschen Gleichung nach sich zieht. An einer Reihe von Beispielen wird die Berechnung der Affinität aus verschiedenen Reaktionen an idealen Gasen erläutert. Es folgt nun die Ableitung der allgemeinen Beziehungen zwischen der Affinität und anderen bekannten physikalisch-chemischen Größen, nämlich der freien Energie, dem thermodynamischen Potential, dem Gibbschen chemischen Potential, der Lewisschen „Flüchtigkeit“ (einer Verallgemeinerung des Partialdruckes bei Gasgemischen), der Aktivität, der Reaktionswärme, der elektromotorischen Kraft usw. In jedem einzelnen Falle werden die abgeleiteten Formeln ausführlich diskutiert und an zahlreichen Beispielen die Berechnung der Affinitäten aus den entsprechenden Formeln dargelegt. Zum Schlusse werden die auf den ersten beiden Hauptsätzen der Thermodynamik aufgebauten Resultate noch durch Heranziehung des Nernstschen Wärmetheorems vervollständigt und insbesondere die Beziehungen zwischen Affinität und chemischen Konstanten aufgedeckt. Auch hier wird die Anwendung dieser Beziehungen zur Berechnung chemischer Affinitäten an vielen Beispielen illustriert. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis beschließt die Monographie.

Fürth (Prag).

Quantentheorie.

● **Darrow, Karl K.:** *La synthèse des ondes et des corpuscules. Exposé élémentaire publié avec une introduction et des notes par Marcel Boll.* Paris: Hermann & Cie 1931. 55 S. Frs. 10.—.

Ce petit livre témoigne du grand talent pédagogique de l'auteur. Le dualisme entre ondes et corpuscules y est exposé très clairement au moyen d'exemples élémentaires bien choisis de manière à introduire graduellement les concepts et les relations fondamentales. Le phénomène de la réfraction conduit à la relation $pv = \text{const.}$ entre l'impulsion p des corpuscules et la vitesse v des ondes. L'effet Compton et les expériences de Davisson et Germer donnent ensuite $p\lambda = h$. A ce moment, le concept de vitesse de groupe est introduit et est trouvé égal à la vitesse corpusculaire. Le cas des ondes stationnaires dans un tube de longueur d permet de montrer le lien entre la relation $p \cdot 2d = nh$ et la condition quantique pour un système périodique. Enfin on dit quelques mots de la diffraction; à ce propos l'auteur a des paroles hasardeuses sur l'„omniscience“ des électrons et des photons, qui paraissent „savoir“ s'il y a ou non plusieurs fentes capables de les diffracter. Il est regrettable que les commentaires du traducteur à ce sujet, dans les notes et l'introduction, ne puissent que fourvoyer davantage le lecteur non prévenu.

L. Rosenfeld (Lüttich).

● **Wigner, Eugen:** *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren.* (Die Wissenschaft. Hrsg. v. Wilhelm Westphal. Bd. 85.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1931. VIII, 332 S. u. 12 Abb. RM. 27.20.

Das Buch soll den Physiker in die gruppentheoretischen Methoden einführen, die sich in der Theorie der Atomspektren als grundlegend erwiesen haben. Zahlreiche, durchgerechnete Beispiele erleichtern wesentlich das Lesen des Buches und machen es sehr geeignet auch für denjenigen, der das Gebiet zum erstenmal betritt. Aus der Theorie der Gruppen bringt der Verf. nur dasjenige, was der Physiker unmittelbar brauchen kann, um die Gesetzmäßigkeiten der Atomspektren zu beherrschen. Die Anwendungen der Gruppentheorie auf Molekülspektren und die Theorie der chemischen Bindung wurden nicht aufgenommen. Die gruppentheoretischen Methoden haben den Nachteil, daß das Pauli-Prinzip erst nachträglich berücksichtigt wird, indem man nur gewisse Terme, die von der Theorie geliefert werden, für physikalisch brauchbar erklärt, die anderen aber wegläßt. Von Slater rührt eine wesentliche Vereinfachung der Theorie her, indem er sich von Anfang an nur auf die antisymmetrischen Zustände beschränkt. Diesem Slaterschen Gedanken ist weitgehend Rechnung getragen, obwohl in der Theorie der Atomspektren die Vorzüge der Methode noch nicht voll zum Ausdruck kommen. Der Verf. rekapituliert zunächst die Grundlagen der Matrizen- und Vektorenrechnung, wobei die für den Gegenstand des Buches wesentlichen Verallgemeinerungen bzw. Spezialfälle besonders hervorgehoben sind. Es folgt abstrakte Gruppentheorie mit vielen Beispielen, und Darstellungstheorie, wobei die Behandlung der für die Atomphysik wichtigen Gruppen der Drehungen und der Permutationen in den Vordergrund gestellt ist. Der Zerfall einer Darstellung in irreduzible Bestandteile bewirkt den Zerfall der Spektraltermen in nichtkombinierende Teilsysteme. Die zweireihigen Darstellungen der Drehungsgruppe führen unmittelbar zur mathematischen Erfassung des Spins. Nachdem gezeigt worden ist, wie die Gruppentheorie die Gesetze der Spektraltermen beherrscht, werden Methoden entwickelt, welche die Ableitung der Auswahl- und Intensitätsregeln für die Spektrallinien gestatten. Die Mitberücksichtigung des Spins führt dabei zur Theorie der Feinstruktur. Der Verf. rechnet mit einem Leser, der mit den Grundlagen der Quantenmechanik vertraut ist, und rekapituliert nur in großen Zügen die Grundlinien, die für den Gegenstand des Buches wichtig sind (Schrödinger-Gleichung, Störungstheorie, Transformationstheorie und Grundzüge der statistischen Deutung).

G. Rumer (Göttingen).

● **March, Arthur:** Die Grundlagen der Quantenmechanik. 2., vollkommen umgearb. Aufl. v. Theorie der Strahlung und der Quanten. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1931. VIII, 293 S. u. 6 Abb. RM. 24.—.

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen die elementaren Rechenmethoden der Quantenmechanik sowie die Wiedergabe einiger bekannter Überlegungen zur Interpretation der Theorie. Das Schlußkapitel trachtet eine Einführung in die quantenmechanische Optik zu geben. Im übrigen enthält das Buch viel zu wenig von den physikalischen Leistungen der Quantenmechanik (kein Wort über Einfluß äußerer Felder auf Spektren, Photo- und Comptoneffekt, Spintheorie, Diracelektron, Bandenspektren und Kernspin, Phänomene an Potentialschwellen, statistische Leistungen); selbst in dem wenigen, das behandelt wurde, ist es nicht einwandfrei. So wird das Verhältnis von mechanischem und magnetischem Eigenmoment des Elektrons, an beiden Stellen, wo es erwähnt wird, ausdrücklich als das normale $2mc/e$ angegeben. Die Auseinandersetzungen über die Quantenmechanik der Lichtquanten und die Statistik neutraler Partikel sind zumindest irreführend und veraltet, wenn nicht unrichtig. Das ganze Werk ist wesentlich formal gehalten, jedoch auf so elementarem Niveau, daß eine Kompensation hierfür durch Bereicherung der Methodik nicht geboten wird.

O. Halpern (New York).

Polvani, G.: Significato sperimentale, teorico, filosofico della meccanica ondulatoria. Rend. Semin. mat. e fis. Milano 6, 136—158 (1931).

Elementare Einführung in die Grundvorstellung der Wellenmechanik. Zunächst wird der berühmte Hamiltonsche Gedanke über die Analogie zwischen Mechanik und Optik auf äußerst klare und elegante Weise dargestellt, sodann die Experimente von Davisson und Germer u. a. kurz beschrieben. Dann folgt eine kurze Andeutung der Schrödingergleichung und eine längere, oberflächliche Diskussion der philosophischen Bedeutung der Unbestimmtheitsrelationen.

L. Rosenfeld (Lüttich).

Schrödinger, E.: Über die Umkehrung der Naturgesetze. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 8/9, 144—153 (1931).

Die Arbeit betrachtet Wahrscheinlichkeitsprobleme folgender Art: Eine Gesamtheit diffundierender Partikel werde beobachtet zu einer Zeit t und zu einer späteren Zeit t_1 ; dabei seien bestimmte, aber ganz beliebige Verteilungen der Partikel festgestellt. (Keineswegs braucht der „normale“ Fall vorzuliegen, daß die zur späteren Zeit gefundene Verteilung diejenige ist, welche sich aus der bei der früheren Beobachtung gefundenen als die wahrscheinlichste vorausberechnen ließ). Gefragt ist nun nach den Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen Verteilungen zu einer zwischen t und t_1 liegenden Zeit t' , insbesondere nach der unter diesen Bedingungen wahrscheinlichsten Verteilung zur Zeit t' . Diese ergibt sich als Produkt einer gewissen Lösung der bekannten Diffusionsgleichung und einer gewissen Lösung der „adjungierten“ Differentialgleichung zu dieser Diffusionsgleichung. Das Ergebnis gestattet z. B. einfach zu beweisen, daß die spontane Entstehung eines stark abnormen Verteilungszustandes „fast immer“ so verläuft, daß ihm die genaue zeitliche Umkehrung eines „normalen“, entropievergrößernden Diffusionsprozesses vorausgeht. Ferner zeigen sich bemerkenswerte formale Analogien zur Quantenmechanik insofern, als ja auch in der Quantenmechanik die Wahrscheinlichkeiten als Produkt aus 2 Lösungen linearer Differentialgleichungen erscheinen.

P. Jordan (Rostock).

Seeger, R. J.: A critique of recent quantum theories. (Dep. of Phys., Washington Univ., Washington.) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 301—310 (1931).

Paneth, F.: Die Entwicklung und der heutige Stand unserer Kenntnisse über das natürliche System der Elemente. (91. Vers., Königsberg i. Pr., Sitzg. v. 7.—11. IX. 1930.) Verh. Ges. dtsh. Naturforsch. 964—976 (1931).

Remak, Brigitte: Zwei Beispiele zur Heisenbergschen Unsicherheitsrelation bei gebundenen Teilchen. Z. Physik 69, 332—345 (1931).

Die Heisenbergsche Unsicherheitsrelation für gebundene Teilchen $\Delta p \Delta q \sim n\hbar$ (n = Quantenzahl des betrachteten Zustands) wird für den harmonischen Oszillator und das Keplerproblem durch direkte Ausrechnung verifiziert.

Nordheim.

Flint, H. T.: A metrical theory and its relation to the charge and masses of the electron and proton. *Proc. roy. Soc. Lond. A* **131**, 170—177 (1931).

Einige fünfdimensionale Betrachtungen über das Wesen von Elektronen und Protonen werden entwickelt. *L. Landau (Leningrad).*

Elsasser, W.: Zur relativistischen Wellenkinematik. I. *Z. Physik* **69**, 1—18 (1931).

Im Anschluß an das Weylsche Buch (Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl. Leipzig: Hirzel 1931; vgl. dies. Zbl. **1**, 175) und vermittelt der von Wigner und Weyl ausgebildeten gruppentheoretischen Methoden wird zunächst ein kurzer Überblick über die Grundtatsachen der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen gegeben. Sodann werden diese Hilfsmittel zur Untersuchung der Lorentzgruppe herangezogen und schließlich die feldfreien Diracgleichungen betrachtet. Die Überlegungen sind rein kinematischen Charakters. *Guth (Leipzig).*

Pokrowski, G. I.: Versuch der Anwendung einiger thermodynamischer Gesetzmäßigkeiten zur Beschreibung von Erscheinungen in Atomkernen. (*Röntgentechn. Abt., Elektrotechn. Staatsinst., Moskau.*) *Physik. Z.* **32**, 374—377 (1931).

Pokrowski, G. I.: Zur Theorie der möglichen Wirkung von Strahlung auf Atomkerne. (*Röntgentechn. Abt., Elektrotechn. Staatsinst., Moskau.*) *Ann. Physik, V. F.* **9**, 505—512 (1931).

Spekulationen über mögliche Wirkungen von Strahlung auf Atomkerne.

Guth (Leipzig).

Weisskopf, Viktor: Zur Theorie der Resonanzfluorescenz. (*Inst. f. Theor. Phys., Univ. Göttingen.*) *Ann. Physik, V. F.* **9**, 23—66 (1931).

Der Verf. untersucht verschiedene Resonanzfluorescenzphänomene (Linienbreite, magnetische Drehung der Polarisationssebene) mit Hilfe der Diracschen Strahlungstheorie, was zu ziemlich komplizierten Rechnungen führt. Die Resultate stimmen, wie zu erwarten war, mit den auf anderen Wegen abgeleiteten überein. Auch der Fall von benachbarten (im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes) Atomen wird behandelt, wobei aber nicht gezeigt wird, inwiefern man in diesem Fall die elektrostatischen Wechselwirkungen vernachlässigen darf. *Landau (Leningrad).*

Minnaert, M., und C. Slob: Die Totalintensitäten der Fraunhoferschen Linien. (*Helio-phys. Abt., Phys. Inst., Univ. Utrecht.*) *Proc. roy. Acad. Amsterd.* **34**, 542—549 (1931).

Herzfeld, K. F.: Das Vorzeichen des quadratischen Starkeffekts. (*Phys. Laborat., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Z. Physik* **69**, 249—252 (1931).

Es wird gezeigt, wie bei der Wirkung eines homogenen elektrischen Feldes auf ein elektrisches Teilchen, das sich längs einer dem Feld parallelen Linie (z-Achse) unter Einfluß einer mit z^{2s-1} proportionalen Kraft bewegt, die mit dem Quadrat der Feldstärke proportionale Zusatzenergie ≥ 0 je nachdem $s \geq 3$ ist. *Ö. Klein (Stockholm).*

Hiedemann, Egon: Electronic velocities in the positive column of high frequency discharges. (*Phys. Inst., Univ. Köln.*) *Physic. Rev., II. s.* **37**, 978—982 (1931).

Ch. J. Brasefield hat Messungen der elektrischen Feldstärke in der positiven Säule von Hochfrequenzentladungen in Hg, He, Ne angestellt und aus den geringen gefundenen Feldstärken geschlossen [*Phys. Rev.* **37**, 82 (1931)], daß die Feldstärke nicht ausreicht, um den Elektronen Geschwindigkeiten von der Größe der Anregungs- oder Ionisierungsspannung des Füllgases aufzuzwingen. Der Autor widerlegt diesen Schluß, indem er zeigt, daß bei den experimentell verwendeten Drucken die Elektronen durch elastische Zusammenstöße mit den Gasmolekülen die erforderlichen Geschwindigkeiten innerhalb einiger Wechselstromperioden erreichen können. *Bechert (München).*

Morse, Philip M., und E. C. G. Stueckelberg: Strahlungslose Stoßprozesse bei kleinen Geschwindigkeiten. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. München.*) *Ann. Physik, V. F.* **9**, 579—606 (1931).

Es werden die unelastischen Stöße zwischen Molekülen und Molekülen, Molekülen und Elektronen, Molekülen und Ionen nach einer Methode behandelt, welche bei

kleinen Geschwindigkeiten der stoßenden Partikel die Bewegung der Komponenten in ihrem gegenseitigen Kraftfeld berücksichtigt. Durch Verwendung von Wellenfunktionen, die das vollständige Überdecken der beiden stoßenden Systeme durch ein passend gewähltes Potential der Form const/r^2 vermeiden, wird die Verwendung gewisser einfacher Ausdrücke für die Wechselwirkung ermöglicht. Die Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen strahlungslosen Stoßvorgänge konnten so berechnet werden. Es ergibt sich in den meisten Fällen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten und dadurch gleichzeitig eine Rechtfertigung für die ziemlich rohe Annäherung des gegenseitigen Potentials der stoßenden Systeme. *Seal* (Wien).

Falkenhagen, H.: Bemerkung zur inneren Reibung starker Elektrolyte in sehr verdünnten Lösungen. Physik. Z. **32**, 365—369 (1931).

Die innere Reibung verdünnter Elektrolytlösungen unterscheidet sich von derjenigen des reinen Lösungsmittels infolge der Kräfte, welche bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgefälles auf die Ionen entstehen. Diese Kräfte haben ihre Ursache in der Relaxationszeit der Ladungswolken, welche die Ionen umgeben. Da die verschiedenen Teile der Ladungswolke eines Ions in Flüssigkeit verschiedener Geschwindigkeit liegen, so entsteht eine Asymmetrie der Wolke, welche eine zusätzliche scherende Kraft und damit eine Erhöhung der inneren Reibung bewirkt. Dieser Effekt ist bereits in einer Arbeit von Falkenhagen und Dole [Z. physik. Chem. **6**, 159 (1929); Physik. Z. **30**, 611 (1929)] ausführlich behandelt. Dabei wurde indessen das Geschwindigkeitsgefälle der Flüssigkeit mit demjenigen der Ionen identifiziert. In der vorliegenden Notiz wird gezeigt, daß dies zwar nicht zutreffend ist, die Berücksichtigung dieses Umstandes aber an den früher erhaltenen Resultaten nichts ändert. *E. Hückel*.

Falkenhagen, H.: Zur theoretischen Deutung der Spannungsabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit starker Elektrolyte. Physik. Z. **32**, 353—365 (1931).

Der Wiensche Spannungseffekt (Sp.eff.) besteht in einer Zunahme der Leitfähigkeit starker Elektrolyte mit der Feldstärke E für große Werte von E . Für kleine E ist die molare Leitfähigkeit Λ unabhängig von E , steigt dann mit wachsendem E an, um sich schließlich asymptotisch einem Grenzwert zu nähern, der gleich dem Wert Λ_∞ für unendliche Verdünnung ist. Der Effekt ist von der Konzentration γ abhängig: je kleiner γ , bei desto kleineren Feldern macht sich das Anwachsen von Λ mit E bemerkbar. Der Sp.eff. steht in engem Zusammenhang mit dem Dispersionseffekt (Disp.eff.), nach welchem eine Abhängigkeit von der Frequenz ν des Feldes besteht, in dem Sinne, daß Λ mit wachsendem ν zunimmt (Theorie von Debye und Falkenhagen). Maßgebend für beide Effekte ist die „Relaxationszeit“ Θ der Ladungswolke, welche jedes Ion in der Lösung umgibt. Θ ist ein Maß dafür, in welchen Zeiten sich Störungen der Ladungsverteilung ausgleichen. Θ ist umgekehrt proportional γ . In Wasser ist Θ unter gewöhnlichen Verhältnissen von der Größenordnung: $10^{-10}/\gamma$ sec. Der Sp.eff. kommt so zustande: Für $E = 0$ erfahren (neben einer kataphoretischen Kraft) die Ionen eine bremsende Relaxationskraft, die davon herrührt, daß infolge des endlichen Θ die Ladungsverteilung um ein bewegtes Ion eine Asymmetrie in Richtung der Geschwindigkeit aufweist. Für starke Felder kann sich die Ladungswolke infolge der hohen Geschwindigkeiten der Ionen nicht mehr vollständig ausbilden, daher sind hierfür Relaxations- und kataphoretische Kraft kleiner, Λ nimmt zu. In der Grenze für $E = \infty$ verschwinden beide Kräfte. Beim Disp.eff. kann sich für hohe Frequenzen die Asymmetrie nicht mehr vollständig ausbilden, daher wird die Relaxationskraft kleiner, Λ nimmt zu. Außerdem ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen dem Feld und der Schwingung der Ladungsverteilung und damit ein Einfluß der Frequenz auf die Dielektrizitätskonstante. Die theoretische Berechnung des Spannungseffektes wird für verdünnte Lösungen auf Grund der verallgemeinerten Differentialgleichung der Brownschen Bewegung durchgeführt unter folgenden Vereinfachungen: Die elektrophoretischen Kräfte werden nicht in Rechnung gesetzt; die Brownsche Bewegung des betrachteten Ions (welche nach Onsager zu berücksichtigen ist) wird nicht in Rechnung gesetzt. Aus Gründen der Einfachheit wird nur der Fall binärer Elektrolyte mit Ionen gleicher Beweglichkeit durchgerechnet. Es gelingt so für alle Werte von E die Lösung der Differentialgleichung anzugeben, während bisher nur eine Näherung für kleine E bekannt war (Joos und Blumentritt). Damit ist die Berechnung der Ladungsverteilung, Relaxationskraft und Leitfähigkeit als Funktion von γ und E durchzuführen. Der Einfluß der Wertigkeit der Ionen, der Temperatur und der Dielektrizitätskonstante (D.K.) des Lösungsmittels auf den Effekt wird diskutiert. Der erhaltene Verlauf in Abhängigkeit von γ und E und der Wertigkeit steht qualitativ in Übereinstimmung mit dem Experiment; ein quantitativer Vergleich ist zur Zeit nicht möglich, da Messungen an Elektrolyten mit Ionen gleicher Beweglichkeit

fehlen. Die Abhängigkeit von T ist noch nicht untersucht: diejenige von der D.K. ist nach Messungen von Bauer in Azetonlösungen in qualitativer Übereinstimmung mit der Theorie. Es wird noch darauf hingewiesen, daß eine Theorie des gleichzeitigen Einflusses hoher E und ν auf A durchführbar sein muß. *E. Hückel (Stuttgart).*

Majumdar, R. C.: Die neue Statistik und die Ionisationsformel bei Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen. (*Univ.-Sternw., Jena.*) *Astron. Nachr.* **242**, 145—154 (1931).

The author first shows the necessity of allowing for the relativity increase in mass of the particles of a degenerate gas in stellar interiors. Using relativistic statistical mechanics he next finds formulae for the number of particles, the pressure, and the total energy and entropy of a given volume of electron gas whose degree of degeneracy is known. He works out approximations for the cases of low and of high degeneracy. He then finds, on the basis of the Fermi-Dirac statistics, general dissociation formulae for a mixture of gases in which $n_k \dots$ particles of substances $C_k \dots$ react reversibly to give $n_\mu \dots$ particles of substances $C_\mu \dots$, with the liberation of energy U , according to the formula $\sum_k n_k C_k = \sum_\mu n_\mu C_\mu + U$. Finally he applies the theory to derive the following ionisation formulae: (a) No degeneracy.

$$\log \frac{n_+ + n_e}{n} = -\frac{U}{kT} + \log \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \log \left(1 + \frac{15}{8} \frac{kT}{m_e c^2} \right).$$

(b) Complete degeneracy.

$$\begin{aligned} mc^2 \left[\left\{ 1 + \left(\frac{3n_+}{4\pi G_+} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ 1 + \left(\frac{3n}{4\pi G} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ = -U - m_e c^2 \left[\left\{ 1 + \left(\frac{3n_e}{4\pi G_e} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

(c) Electrons alone degenerate.

$$\log \frac{n_+}{n} = -\frac{U}{kT} - \frac{m_e c^2}{kT} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{3n_e}{4\pi G_e} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e^2 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right];$$

where n, n_+, n_e are the concentrations of atoms, ions and electrons respectively; G, G_+, G_e their statistical weights; and $m, m_+ (=m), m_e$ their masses. These give the relativistic form of (a) Saha's formulae, (b), (c) Milne's formulae for degenerate gases. They are not to be taken as finally suited to astrophysical applications since they neglect radiation pressure and other factors. *W. H. McCrea (Edinburgh).*

Kohlrausch, K. W. Fritz: Bericht über den Smekal-Raman-Effekt. *Physik. Z.* **32**, 385—406 (1931).

Cotton, A.: Sur les propriétés optiques d'un liquide placé dans un champ magnétique et traversé par un faisceau polarisé de direction quelconque. *C. r. Acad. Sci. Paris* **192**, 1065—1069 (1931).

Geophysik.

Bewegung der Erde, Konstitution des Erdkörpers:

Serese, F. J.: The instrumental phase-difference of seismograph records; an illustration of the properties of damped oscillatory systems. *Proc. phys. Soc. Lond.* **43**, 259—274 (1931).

Belluigi, A., and G. Lenzi: A new method of topographical correction in gravimetrical prospecting. *Gerlands Beitr. Geophys.* **29**, 121—130 (1931).

Im Prinzip und in der Anwendung unterscheidet sich das hier dargestellte Diagrammverfahren zur Berechnung der Wirkung beliebiger Massen auf die Eötvössche Drehwaage nur wenig von den Diagrammverfahren von Nikiforov, Numerov, K. Jung, Haalek, Barton, Shaw und Lancaster-Jones (vgl. d. Zusammenstellung im Handbuch d. Experimentalphys. **25 III**, 151ff.). Die Koordinaten sind: Z vertikal abwärts, X horizontal nach Norden, Y horizontal nach Osten. Die Massen werden in horizontale, zu einer der Achsen (X oder Y) parallele Prismen zerlegt, deren Grund-

flächen von Radien und konzentrischen Kreisen begrenzt sind. Radien und Kreise sind ungleich abständig und so gewählt, daß bei unendlicher Länge und konstanter Dichte jedes Prisma auf den Aufpunkt die gleiche Wirkung ausübt. Dann kann in solchem Fall die Wirkung einer Masse durch einfaches Auszählen ihres Querschnittes gefunden werden. Bei endlicher Prismenlänge ist jedem Querschnittelement (= Prismengrundriß) ein besonders Gewicht beizulegen, das Gewicht hängt ab von Lage und Länge des Prismas. Die Herstellung der zur Auszählung notwendigen Diagramme und ihre Anwendung ist genau beschrieben, gebrauchsfertige Diagramme sind nicht beigegeben.

K. Jung (Potsdam).

Lambert, Walter D.: Note on the theoretical basis of isostasy. Amer. J. Sci., V. s. 21, 345—349 (1931).

Prey, A.: Zur Frage nach dem isostatischen Massenausgleich in der Erdrinde. Gerlands Beitr. Geophys. 29, 201—225 (1931).

Um nachzuweisen, daß es nicht möglich ist, die Schwereverteilung der Erde ohne Annahme isostatischen Ausgleichs zu erklären, wurden die Undulationen der Niveaufläche und die Schwereverteilung für den Fall der nicht isostatisch aufgebauten Erde berechnet. Es wird angenommen, daß die festen Erdkrustenmassen durchweg gleiche Dichte haben. Solche Berechnungen für den nicht isostatischen Fall bieten besondere Schwierigkeiten, weil es wegen der großen Geoidundulationen nicht statthaft ist, das durch die Meereshöhen ausgedrückte Relief der Erdkruste einfach der „normalen“, eingeebneten Erde aufzusetzen; man muß das Relief der Erdkruste der vorläufig noch in ihren Undulationen unbekannten Geoidfläche aufgesetzt denken. Um einen normalen Vergleichszustand zu erhalten, werden die festen Krustenmassen der nicht isostatisch aufgebauten Erde vollständig eingeebnet und vom Meerwasser gleichmäßig bedeckt. Dann hat das Meer eine Tiefe von 2680,9 m, und die Niveaufläche vom Arbeitswert der wirklichen Meeresoberfläche befindet sich 2455,7 m über der eingeebneten Krustenoberfläche und 225,2 m unter der Oberfläche des normalen Meeres. Sie wird in allen Untersuchungen als Bezugsfläche betrachtet. Aus dieser Massenanordnung wird durch bloße Verschiebung der Krusten- und Wassermassen das wirkliche Relief der Erde hergestellt. Dabei verlagern sich die Niveauflächen, und die der Bezugsfläche entsprechende Niveaufläche ist das Geoid, d. h. sie bildet in den Ozeangebieten die Oberfläche der Wassermassen. Ihr Abstand von der Bezugsfläche wird berechnet, wobei die vom Verf. früher gegebene Darstellung des Erdreliefs durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung als numerische Grundlage dient. In einer Tabelle wird das Resultat mitgeteilt für die Schnittpunkte von 17 gleichabständigen Breitenkreisen und 31 gleichabständigen Meridianen. Die Erhebungen des Geoids über die Bezugsfläche betragen bis zu etwa + 1600 m (Zentralasien), die tiefsten Senken bis zu — 1200 m (südlicher Pazifik), der Nordatlantik bildet sich so gut wie gar nicht ab und vermittelt zwischen hohen positiven Werten in Europa und kleineren positiven Werten in Nordamerika. Sodann werden für die nicht isostatische Erde die Schwereverteilung auf Kontinent- und Meeresoberflächen berechnet und die Schwereverteilungen auf der Niveaufläche nach Fayescher und Bouguerscher Reduktion. Auch die Schwereverteilungen werden in Tabellen angegeben. Wäre die Erdkruste nicht isostatisch aufgebaut, so müßten die berechneten Schwereverteilungen ungefähr mit den gemessenen, in gleicher Weise reduzierten Anomalien übereinstimmen, von einem konstanten Unterschied abgesehen, der daher kommt, daß der empirische Normalwert der gemessenen Schwerewerte nicht mit dem der Rechnung zugrunde gelegten Normalwert identisch ist. Es zeigen sich wesentliche Unterschiede zwischen gemessener und berechneter Schwere. Vor allem zeigen die berechneten Werte starke Unsymmetrien zwischen Nord- und Südhalbkugel und Ost- und Westhalbkugel, worin sich die Glieder 1. Ordnung der Kugelfunktionenentwicklung ausdrücken; und die Schwere in Nordamerika müßte bei gleicher Reduktionsart den berechneten Werten nach etwa 100 Milligal größer sein als in Europa. Da in den gemessenen Schwerewerten keine Andeutung hiervon zu erkennen ist, folgt zwingend,

daß die Erdkruste vom unausgeglichene Zustand weit entfernt ist und man bisher mit Recht einen im allgemeinen isostatisch ausgeglichenen Zustand der Erdkruste angenommen hat.

K. Jung (Potsdam).

Geodäsie:

Idelson, N., und N. Malkin: Die Stokesesche Formel in der Geodäsie als Lösung einer Randwertaufgabe. Gerlands Beitr. Geophys. **29**, 156—160 (1931).

Sei γ die für das Referenzellipsoid berechnete Schwerkraft, g die auf dem Geoid beobachtete; ϱ der Radiusvektor des Beobachtungsortes auf dem Geoid, das außerhalb der Referenzsphäre vom Radius 1 verlaufen soll, W das Potential des Geoids, U dasjenige des Ellipsoids, $T = W - U$. T soll bestimmt werden als eine Funktion, die außerhalb der Kugel vom Radius 1 harmonisch ist, im Unendlichen verschwindet, auf der Referenzkugel selbst aber durch $2T + \frac{\partial T}{\partial \varrho} = \gamma - g = f(\Theta, \varphi)$ gegeben ist, wo $f(\Theta, \varphi)$ eine bekannte Funktion der Polarkoordinaten (Θ, φ) ist. Setzt man

$$v(\varrho, \Theta, \varphi) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho^2 T,$$

so ist

$$v(1, \Theta, \varphi) = f(\Theta, \varphi)$$

und bei $\varrho > 1$ nach dem Poissonschen Lehrsatz

$$v(\varrho, \Theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') \frac{\varrho^2 - 1}{r^3} d\sigma',$$

wo

$$d\sigma' = \sin \Theta' d\Theta' d\varphi', \quad r^2 = 1 - 2\varrho \cos \psi + \varrho^2, \\ \cos \psi = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 T) = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') \frac{\varrho^3 - \varrho}{r^3} d\sigma'.$$

Die Integration nach ϱ zwischen $\varrho = \varrho$ und $\varrho = \infty$ ergibt bei Berücksichtigung von

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} (\varrho^2 T) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} [\varrho^2 (W - U)] = 0,$$

daß

$$T = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') \frac{S(\varrho, \psi)}{\varrho^2} d\sigma',$$

wo

$$S(\varrho, \psi) = -\frac{2\varrho^2}{r} + 3r + 3\cos \psi \lg \frac{\varrho - \cos \psi + r}{2\varrho} - \varrho + 5\cos \psi.$$

Man hat nun $\varrho = 1$ zu setzen. Dann werden

$$r = 2 \sin \frac{\psi}{2}, \quad T(1, \Theta, \varphi) = T = \frac{1}{4\pi} \int f(\Theta', \varphi') S(\psi) d\sigma',$$

wo $S(\psi)$ die Stokesesche Funktion durch

$$S(\psi) = S(1, \psi) = -\frac{1}{\sin \psi/2} + 6 \sin \frac{\psi}{2} + 3 \cos \psi \lg \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right) - 1 + 5 \cos \psi$$

gegeben ist.

L. Tuwim (Potsdam).

Riel, H. F. van: Strenge Bestimmung des mittleren Fehlers beim Einschnneiden. Z. Vermessgswes. **60**, 283—292 (1931).

Die übliche Ausgleichung der nach dem Einschnideverfahren bestimmten Punkte wird in 3 Teilen erledigt: 1. die Stationsausgleichung (Vorwärts- und Rückwärts-einschnneiden), 2. die Orientierung der Richtungen (Vorwärtseinschnneiden), 3. die eigentliche Punktausgleichung (Vorwärts- und Rückwärtseinschnneiden). Unter Einführung bestimmter Gewichte führt bekanntlich diese Art der schrittweisen Ausgleichung zu denselben Koordinaten der Punkte, als wenn alle gemessenen Richtungen direkt ausgeglichen worden wären. Gleicht man in der gebräuchlichen Weise schrittweise aus, so können bei der Berechnung des mittleren Fehlers der Koordinaten erhebliche Teile

der Beobachtungsfehler infolge von Mittelbildungen verdeckt werden. Es entsteht daher die Frage, ob diese verdeckten Teile nicht einen wohl zu beachtenden Anteil an dem gesuchten mittleren Fehler haben. Verf. kommt in seiner Abhandlung zu dem Ergebnis, daß die gewöhnliche Berechnung des mittleren Fehlers bei der Punktausgleichung zu falschen Schlüssen führt. Es ist notwendig, daß die mittleren Fehler der Stationsausgleichung, evtl. auch die der Orientierung, in die Rechnung einbezogen werden.
Schmehl (Potsdam).

Werkmeister, P.: Rechnerische Bestimmung der mittleren Koordinatenfehler bei Punktbestimmungen ohne überschüssige Messungen. *Z. Vermessungswes.* **60**, 343–350 (1931).

Luftlektrizität, Höhenstrahlung:

Brüche, Ernst: Some new theoretical and experimental results on the aurora polaris. (*Forsch.-Inst. d. AEG., Berlin.*) *Terrestr. Magnet. a. atmosph. Electr.* **36**, 41–52 (1931).

Störmer berechnet in seiner Polarlichttheorie die Bahnen von Elektronen, die diese im Felde eines Elementarmagneten beschreiben; Brüche macht die Gestalt dieser Bahnen durch fadenförmige Elektronenstrahlen, die sich im Magnetfelde einer die Erde vertretenden Stromspule (Terella) bewegen, sichtbar. In der vorliegenden Arbeit werden nicht die im allgemeinen mehr bekannten, auf dem Magneten endigenden, sondern die um ihn herum verlaufenden, periodischen Bahnen behandelt. Die experimentell erhaltenen Bahnformen werden in zahlreichen Lichtbildern wiedergegeben und mit den daneben gezeichneten, rechnerisch ermittelten Bahngestalten verglichen.
Schlomka (Halle a. S.).

Das, A. K.: Origin of cosmic penetrating radiation. (*Alipore Observ., Calcutta.*) *Naturwiss.* **1931 I**, 305–306.

The author considers the production of a light quantum of wave length λ by the mutual annihilation of an electron and proton in an enclosure in thermodynamic equilibrium at temperature T . Regarding the photon as a sphere of radius λ , he postulates that the energy density inside it should equal that of the Planck radiation in the enclosure. For this he requires $\lambda = 0,54 \times 10^{-13}$ cm., which agrees with the observed wave length of cosmic radiation, and $T = 5 \times 10^{12}$ deg. He takes this as indicating that cosmic radiation proceeds from an astronomical source at this order of temperature.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Geiger, H.: Ultra-penetrating rays. *Nature (Lond.)* **1931 I**, 785–787.

Bericht des Verf. vor der Royal Society am 14. V. 1931 über die neueren Versuche und Ansichten über die Ultrastrahlung: Regener u. a. schließen aus ihren Absorptionsmessungen auf kurzwellige Strahlung (γ -Strahlen), Bothe und Kolhörster aus Koinzidenzmessungen an 2 Zählkammern auf schnellbewegte Elektronen (β -Strahlen), Geiger u. a. aus den Eigenschaften der Sekundärstrahlung bei Durchgang durch andere Stoffe auf schnelle Materieteilchen (α -Strahlen). *F. Bartels (Magdeburg).*

Rossi, Bruno: Ricerche sull'azione del campo magnetico terrestre sopra i corpuscoli della radiazione penetrante. *Nuovo Cimento*, N. s. **8**, 85–97 (1931).

Verf. berechnet nach der Störmerschen Theorie, daß in Florenz (44° magnetische Breite) Elektronen außerterrestrischer Herkunft mit einer Energie kleiner als $4,10^9$ V nur vom Osten der Ebene des magnetischen Meridians zur Erdoberfläche gelangen können. Daraus schließt Verf. auf eine Asymmetrie in der azimutalen Richtungsverteilung der Höhenstrahlelektronen von einigen Milliarden Volt. Zur Untersuchung der azimutalen Richtungsverteilung der Höhenstrahlelektronen führte Verf. Koinzidenzversuche mit 2 Zählrohren aus. Es erwies sich, daß der Unterschied zwischen den systematischen Koinzidenzen aus dem Orient und denen aus dem Okzident vollständig innerhalb der statistischen Fehlergrenze liegt, da sich bis auf $\pm 2\%$ Unabhängigkeit der Anzahl der Höhenstrahlelektronen vom Azimut ergab. Daraus schließt Verf., daß entweder die Höhenstrahlelektronen außerterrestrischer Herkunft mit Ener-

gien bedeutend größer als 10^{10} V sind, oder aber die Energie der Höhenstrahlelektronen ist nicht sehr groß, aber sie sind atmosphärischen Ursprungs (sekundär erzeugt durch primäre Quantenstrahlung). Auf die Möglichkeit, daß die Höhenstrahlungsteilchen z. B. Protonen sind, wird schließlich hingewiesen. *L. Tuwim* (Potsdam).

Filippo, D. di: Le formule di Biot-Mollweide e di Pinto in confronto coi valori degli elementi magnetici della Somalia. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 186—190 (1931).

Meteorologie:

Haurwitz, B.: Über die Änderung des Temperaturgradienten in Luftsäulen von endlicher Höhe bei vertikaler Verschiebung. (*Geophysikal. Inst., Univ. Leipzig.*) Ann. Hydrogr. 59, 22—25 (1931).

Margules hatte das Problem der Änderung des Temperaturgradienten in Luftsäulen unter dem Einfluß der durch adiabatische Vertikalverschiebungen bewirkten Druckänderungen nur für Schichten unendlich kleiner Höhe gelöst. Durch ein Näherungsverfahren gelingt Haurwitz nunmehr auch die Lösung für Luftsäulen endlicher Höhe unter der Voraussetzung, daß beim Verschiebungsprozeß keine Querschnittsänderungen auftreten. Es sei α der Temperaturgradient in der betrachteten Schicht vor der Verschiebung, ϑ_0 die Temperatur an der unteren Begrenzungsfläche der Schicht, p_0 der Druck daselbst, der nach erfolgter Vertikalverschiebung an der neuen Basisfläche in $p_0 + \beta$ übergegangen sei, g die Schwerebeschleunigung, R die Gaskonstante der Luft und γ der adiabatische Temperaturgradient; dann ist der Temperaturgradient in der Schicht nach der Verschiebung: $-\frac{d\vartheta}{dz} = \alpha + \frac{\beta}{p_0}(\alpha - \gamma)\left(1 + \frac{p_0 + \beta}{p_0} \cdot \frac{gz}{R\vartheta_0}\right)$, also eine lineare Funktion des Abstandes z von der unteren Begrenzungsfläche der Schicht. Das ist der wesentlichste Unterschied gegenüber der Margules'schen Lösung für unendlich dünne Schichten: $-\frac{d\vartheta}{dz} = \alpha + \frac{\beta}{p_0}(\alpha - \gamma)$, die somit als erste Näherung aus der Haurwitzschen hervorgeht.

Über die Größe der Gradientenänderungen möge folgendes Beispiel orientieren: Eine 2 km hohe isotherme Luftschicht, deren Basis anfänglich in 10 km Höhe liegt, wo $p_0 = 262$ mbar und $\vartheta_0 = 203^\circ$ abs., werde adiabatisch um 2 km gehoben (I) bzw. gesenkt (II). Es treten dann folgende Gradienten ($^\circ\text{C}/100$ m) auf:

	$z = 0$ m	1000 m	2000 m
(I)	$d\vartheta/dz = -0,27$	-0,28	-0,30
(II)	$d\vartheta/dz = +0,35$	+0,38	+0,41

Dabei war im 1. Falle $\beta = -70$ mbar, im 2. $\beta = +91$ mbar.

H. Ertel (Berlin).

● **Krauss, J., und H. Meldau:** Wetter- und Meereskunde für Seefahrer. Zugleich 2. Aufl. v. J. Krauss, Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. Berlin: Julius Springer 1931. IV, 152 S., 9 Taf. u. 61 Abb. RM. 7.40.

Lombardini, M.: Un notevole contributo alla previsione matematica del tempo. (*Ufficio Presagi, Roma.*) Nuovo Cimento, N. s. 8, LII—LIX (1931).

Chiara esposizione riassuntiva dei risultati teorici conseguiti dal Sig. A. Gião circa il problema della previsione matematica del tempo e pubblicati nella memoria „La mécanique différentielle des fronts et du champ isobarique“ (*Mémorial de l'Office Nat. Météorol. de France*, Nr. 20, Paris 1929).

Bossolasco (Turin).

Ficker, H. v.: Über die Entstehung lokaler Wärmegewitter. I. Mitt. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 3, 28—39 (1931).

In dieser ersten Mitteilung werden die allgemeinen Gesichtspunkte erörtert, nach denen die Untersuchung einzelner Wärmegewitter, die in späteren Mitteilungen veröffentlicht werden wird, hauptsächlich an Hand aerologischer Beobachtungen durchgeführt werden soll.

Die Ausführungen beziehen sich vor allem auf die Wärmegewitter in ganz flachen Gebieten von einförmiger Oberflächenbeschaffenheit, deren Entstehung viel schwieriger zu erklären ist als etwa die Gebirgsgewitter oder die Gewitter in Küstengebieten. Verf. stellt die 2 Fragen: 1. Wodurch entsteht bei Wärmegewittern in einem ebenen Gebiet der aufsteigende Luftstrom? 2. Was für Ursachen führen zur Ausbreitung eines an einer Stelle ein-

geleiteten Gewitters? Die Untersuchung der 1. Frage führt zu der Aufgabe, diejenigen besonderen Bedingungen aufzufinden, unter denen sich die ungeordnete, nicht sehr hochreichende Kleinkonvektion in eine geordnete, räumlich gegliederte, bis in große Höhen reichende Großkonvektion umwandelt. Verf. sieht diese Bedingungen vor allem in dem Vorhandensein eines feuchtlabilen Anfangszustandes und ferner in dem Auftreten von zwei Instabilitätszonen, einer unteren in den bodennahen Luftschichten und einer oberen in größerer Höhe. Als Ursache der Ausbreitung des Gewitterprozesses bei ausgesprochenen Wärmegewittern wird ein böenartiger Vorgang in den unteren Schichten und die Bildung einer sehr hochliegenden Instabilitätszone durch advective Abkühlung angenommen. *Baur* (Frankfurt a.M.).

Büttner, Konrad: Die Berechnung der atmosphärischen Trübung aus Aktinometermessungen der Sonnenstrahlung. *Meteor. Z.* 48, 161—172 (1931).

Lauscher, Friedrich: Zur Berechnung des Trübungsfaktors. (*Zentralanst. f. Meteor. u. Geodynamik, Wien.*) *Meteor. Z.* 48, 212—217 (1931).

Meereskunde:

Rauschelbach, H.: Beiträge zur Bearbeitung von Gezeitenstrombeobachtungen. II. Tl. Die Berechnung der Elemente der Gezeitenstromellipsen. (*Dtsch. Seewarte, Hamburg.*) *Ann. Hydrogr.* 59, 124—133 (1931).

Die in einem früher erschienenen Aufsatz des Verf. entwickelte harmonische Analyse der Gezeitenstrombeobachtungen liefert außer beiden Komponenten des mittleren Reststromes für jede Teiltide 2 Paare harmonischer Konstanten zur Beschreibung der rein periodischen, horizontalen Gezeitenbewegung in einer Stromellipse. Die Aufstellung von Formeln zur Berechnung ihrer Bestimmungsstücke und ihrer Orientierung gegen die Nordrichtung sowie die Ermittlung des Umlaufsinnens in der Stromellipse ist das Ziel der Abhandlung, das mit durchaus elementaren Hilfsmitteln erreicht wird. (I. vgl. dies. Zbl. 1, 192.) *F. Hopfner* (Wien).

Ertel, Hans: Die Krümmung der isobaren Flächen im Ozean. *Ann. Hydrogr.* 59, 133—138 (1931).

Der Verf. bestimmt aus den zweiten Ableitungen des Stromvektors die Krümmungsverhältnisse der isobaren Flächen in einem Ozean konstanter Dichte; der Fall veränderlicher Dichte wird unter Einschränkung der Voraussetzungen andeutungsweise behandelt. Bei zyklonaler Horizontalzirkulation sind die isobaren Flächen schwächer gekrümmt als die Potentialflächen. Denkt man sich diese eben, so sind bei zyklonaler Horizontalzirkulation die oberhalb einer solchen Potentialfläche liegenden Isobaren konkav gegen diese gekrümmt. Bei antizyklonaler Horizontalzirkulation stellen sich die entgegengesetzten Erscheinungen ein. *F. Hopfner* (Wien).

Kristallographie.

Tacchella, Giuseppe: Sulle divisioni semiregolari del piano. *Atti Soc. ligust. Sci.*, N. s. 10, 18—25 (1931).

Es wird danach gesucht, in welcher Weise sich die unendlich ausgedehnte Ebene lückenlos mit regulären Polygonen derart bedecken läßt, daß sich in jedem Eckpunkt die gleichen Anzahlen gleicher regulärer Polygone in gleicher Anordnung finden. Nach Aufstellung einiger notwendiger Bedingungen werden 8 Möglichkeiten gefunden, deren Existenz durch Konstruktion bewiesen wird. *F. Laves* (Göttingen).

Surrer, Franz: Über halbrekuläre Vielzelle im vierdimensionalen Raum. München: Diss. 1931. 75 S.

Die Arbeit führt zur Auffindung sämtlicher im vierdimensionalen Raume möglichen halbrekulärer Vielzelle. Diese werden folgendermaßen definiert: „Ein Vielzell heißt halbrekulär, wenn es gleicheckig ist und seine Grenzzäume reguläre Vielfläche sind oder wenn es gleichräumig ist und seine Ecken reguläre Vielkante sind. Beide Systeme stehen sich polarreziprok gegenüber. Ein Vielzell heißt gleicheckig bzw. gleichräumig, wenn seine Gruppe gestattet, jede Ecke bzw. Grenzzelle in jede andere überzuführen. Die gleicheckigen halbrekulären Vielzelle könnte man in Analogie zum dreidimensionalen Raum (R_3) Archimedische nennen.“ Nach einigen allgemeinen Sätzen über die Eck-

körper (= diejenigen Vielfache, welche die Endpunkte der von einer Vielzelle ausgehenden Kanten zu Ecken haben), Grenzzellen und Kanten halbbregulärer Vielzelle (z. B. 4. Satz: Die Grenzzellen der gleichseitigen halbbregulären Vielzelle sind reguläre Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder. Alle Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Die Ecken der gleichräumigen halbbregulären Vielzelle sind reguläre Vierkante, Achtkante oder Zwanzigkante. Alle Kanten sind dreiräumig und regulär) werden unter Benutzung der Eulerschen Gleichung $e + f = k + r$ verschiedene Beziehungen zwischen den Anzahlen der Ecken, Flächen, Kanten und Zellen aufgestellt. Es wird sodann auf konstruktivem wie auch rechnerischem Wege nach „möglichen“ Eckkörpern gesucht, welche verschiedenen vorher aufgestellten, für die Existenz von Eckkörpern notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingungen genügen. Es werden 9 gefunden und nunmehr daraufhin untersucht, ob ihnen wirklich halbbreguläre Vielzelle entsprechen. In 4 Fällen wird konstruktiv gezeigt, daß ihre Verwendung als Eckkörper halbbregulärer Vielzelle unmöglich ist, und unter Berücksichtigung des Eulerschen Satzes lassen sich 2 weitere Fälle ausschließen. Entsprechend der Bedingung im R_3 , daß die Summe der Krümmungen K (K = Krümmung einer Ecke = $2\pi - s$, wo s die Summe der Kantenwinkel der Ecke bedeutet) aller Ecken eines konvexen Vielflaches gleich 4π sein muß, wird gezeigt, daß die Krümmung einer Ecke eines gleichseitigen Vielzells in $2\pi^2$ ohne Rest enthalten sein muß. Diesem Satz genügen nur 3 der 9 Eckkörper, worauf als Hauptergebnis der Arbeit der Satz folgt: „Es gibt 3 gleichseitige halbbreguläre Vielzelle, das 10-Zell (10, 30, 30, 10) bestehend aus 5 Tetraedern und 5 Oktaedern, das 720-Zell (720, 3600, 3600, 720), bestehend aus 600 Oktaedern und 120 Ikosaedern und das 144-Zell (96, 432, 480, 144), bestehend aus 120 Tetraedern und 24 Ikosaedern. Diesen stehen polarreziprok 3 gleichräumige halbbreguläre Vielzelle gegenüber, ein 10-Zell (10, 30, 30, 10), ein 720-Zell (720, 3600, 3600, 720) und ein 96-Zell (144, 480, 432, 96)“. (Die nach den X-Zellen in Klammern stehenden Zahlen bedeuten die Anzahlen der Ecken, Kanten, Flächen und Grenzzellen des X-Zells). Der zweite Teil der Arbeit gibt eine nähere Beschreibung und damit den Existenzbeweis dieser 6 halbbregulären Vielzelle, bezüglich welcher im ersten Teil ja lediglich bewiesen werden konnte, daß es keine anderen als die angeführten geben kann. Es werden die Koordinaten der Eckpunkte angegeben und mit Hilfe verschiedener Projektionsmethoden die komplizierten Gebilde der Anschauung nähergebracht. Vom gleichseitigen 10-Zell sind verschiedene Abwicklungen auf den R_3 gezeichnet worden, analog den Abwicklungen (Netzen) von Polyedern auf die Ebene. Am Schluß der Arbeit wird noch darauf hingewiesen, daß das gleichseitige (bzw. gleichräumige) 10-Zell und 720-Zell auch noch gleichkantig (bzw. gleichflächig) ist, da auch die Eckkörper bzw. Grenzzellen halbbregulär sind. Die Anschauung wird durch reiche Figurenbeilagen gut unterstützt.

F. Laves (Göttingen).

Rawlins, F. I. G.: The new crystallography. Nature (Lond.) 1931 I, 632—633.

Statt der Raumgruppenbestimmung rücken mehr und mehr die Fragen nach den Nachbarn in den Mittelpunkt des Interesses der Strukturforscher. Dadurch schafft man sich Zugang zu dynamischen Fragen. — In der neueren Thermodynamik der Kristalle gibt es zwei wesentliche Ergebnisse: 1. Durch Anwendung der Quantenmechanik auf die Kristalle wurde gezeigt (Pauling), daß auch im Kristalle die Moleküle einzeln noch ihre Drehbarkeit behalten können. 2. Die spezifische Wärme ist abhängig von der Symmetrie und der Anzahl der Nachbarn. — Die Kristallspektren zerfallen je nach Ursprung in drei Klassen: die eines einzelnen Atoms, die eines oder mehrerer Ionen und schließlich im äußersten Ultrarot die Banden, für die das ganze Gitter verantwortlich ist. Ungelöst sei die Frage der Kristallspektren der seltenen Erden. Um das Spektrum einer Ionengruppe wie MnO_4 zu studieren, betrachtet man neben den Kristallen permangansaure Salze deren Lösungen in Mitteln verschiedener Dielektrizitätskonstanten. — Der Raman-Effekt der Kristalle scheint noch nicht erfolgreich genug untersucht zu sein. Verf. meint, daß die statistische Mechanik an der zukünftigen Entwicklung der Kristallographie bedeutenden Anteil nehmen wird.

Heesch (Göttingen).